EINE ALLGEMEINE KONSTRUKTION VON SPEKTRALEN FOLGEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
vorgelegt von

HANS-BERNDT BRINKMANN
aus
Düsseldorf

Saarbrücken 1964

Tag der mündlichen Prüfung: 28.7.64.

Der Dekan: Prof.Dr.G.de Lattin

Berichterstatter: Prof.Dr.D.Puppe

Prof.Dr.F.Hirzebruch

Herrn Professor Dr.Puppe verdanke ich die Anregung, mich mit der Stabilen Homotopietheorie und der Adams'schen Spektralfolge zu beschäftigen. Ich danke Herrn Professor Puppe für das Interesse an meiner Arbeit und für viele Anregungen, die ich aus Unterhaltungen mit ihm erhielt.
Außerdem hat mir Herr Professor Puppe einen weitgehenden Einblick in seine eigenen Arbeiten gegeben, ohne den diese Arbeit nicht denkbar wäre.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Überblick

1. Graduierte Kategorien..... 1

2. Quasiexakte Kategorien..... 4

3. Additive und abelsche Kategorien..... 9

4. I-Kategorien..... 12

5. Spektrale Folgen..... 28

6. c-Kategorien und δ-Funktoren..... 44

7. Homologische Algebra..... 48

8. Die formale Konstruktion der ADAMS'schen Spektralfolge..... 61

9. Die ADAMS'sche Spektralfolge in der Stabilen Homotopietheorie. 72

10. Der E_2-(B^1)-Term der Spektralen Folge..... 79

11. Zur Konvergenz der ADAMS'schen Spektralfolge in der Stabilen Homotopietheorie..... 86

Anhang: Beispiel für die nicht eindeutige Ergänzbarkeit zu Morphismen bei stabilen Dreiecken..... 90

EINLEITUNG UND ÜBERBLICK

Von D.PUPPE wurde die ADAMS'sche Spektralfolge (|1|-|4|,|14|) in der stabilen Homotopietheorie |28| beschrieben und angeregt, die Konstruktion allgemeiner in einer stabilen Kategorie (|28|) in der Situation (8.16) [1]) durchzuführen. Bei der genaueren Untersuchung der notwendigen Voraussetzungen bemerkten wir die auffallende formale Analogie der Konstruktion einer ADAMS'schen Spektralfolge zu der Konstruktion der universellen Koeffizientenfolge in |11|. Die in beiden Fällen benötigten Voraussetzungen ließen eine gemeinsame Axiomatisierung zu, so daß die Konstruktion und wesentliche formale Eigenschaften der Spektralfolgen (Funktor, E_2-Term) gemeinsam behandelt werden können. Die Konstruktion besteht in der Anwendung der von derivierten Funktoren her bekannten projektiven (injektiven) Auflösungen, die bei Anwendung einer exakt zusammenhängenden Folge von (additiven) Funktoren nach Ergänzung der Kerne eine spektrale Folge ergeben (|4|,|11|). In einer abelschen Kategorie werden dabei kurz exakte Folgen mit projektivem Mittelteil zur Auflösung herangezogen und in der stabilen Homotopietheorie Cofaserungen mit einem EILENBERG-MAC'LANE- Objekt mit (über der STEENROD-Algebra) freier Cohomologie an der Mittelstelle. In der stabilen Homotopietheorie der Form |28| geschieht die Auflösung mit stabilen Dreiecken. Wir stellen jedoch fest, daß man die dritte Dreieckseite fortlassen kann, um die volle Übereinstimmung mit der Konstruktion von |11| zu erzielen. Die dritte Dreieckseite realisiert den Randoperator der exakt zusammenhängenden Folge von Funktoren; dieser Randoperator wird in |11| im allgemeinen nicht realisierbar sein.

Daß die in |4| verwandten Funktoren Cohomologie und Homotopie respektive eine projektive Auflösung bzw. ein exaktes Paar ergeben, liegt daran, daß im stabilen Bereich Faserungen und Cofaserungen zusammenfallen. Dadurch erscheint der nichtstabile Zugang zur ADAMS'schen Spektralfolge in |14| etwas anders. Er entspricht unserer Konstruktion bei Fortlassung der beiden anderen Dreieckseiten. Man beachte, daß dann die Morphismen jeweils dem gewünschten Charakter der Auflösungen entgegenlaufen.

Die oben erwähnten spektralen Folgen gewinnt man jeweils aus exakten Paaren und die vorstehenden Bemerkungen beziehen sich auf die Konstruktion des jeweiligen exakten Paares. Die allgemeine Konstruktion ist in 7. nach einführender Erinnerung an |11| beschrieben. In 8. wird die speziellere Form in einer stabilen Kategorie |28| angegeben, 9. bringt ein Beispiel

[1]) diese Arbeit

für 8. mit der stabilen Homotopietheorie |28| und in 1o. beschreiben wir den E_2-Term der spektralen Folge als einen derivierten Funktor zunächst für das Beispiel von 9. und anschließend allgemeiner für den Fall von 8. bzw. 7..

Die in 9. angegebenen Einzelheiten über die stabile Homotopietheorie von |28| und die Konstruktion der Spektralfolge entnahmen wir bis auf leichte Änderungen Vorträgen und nicht veröffentlichten Aufzeichnungen von D.PUPPE. Die die stabile Homotopietheorie betreffenden Tatsachen werden in |3o| enthalten sein, ebenso wie die in 8. ohne Beweis mitgeteilten Sätze über stabile Kategorien.

Wesentlich für die Funktoreigenschaften der Konstruktion in 7. ist der bekannte Vergleichssatz für projektive Auflösungen. Da wir diesen Satz in 7. etwas allgemeiner formulieren, als wir ihn benötigen, geben wir in 11. einen kurzen Hinweis auf die Konvergenzuntersuchungen an der ADAMS'schen Spektralfolge in der stabilen Homotopietheorie. Der Beweis von 11.4.,(11.5) ist in unveröffentlichten Aufzeichnungen von D.PUPPE enthalten und wir geben nur den Teil genauer an, der die allgemeinere Form des Vergleichssatzes rechtfertigt. Am Schluß von 11. erwähnen wir, in welcher Richtung sich dieses Resultat und der in |14| beschriebene Konvergenzsatz ohne Schwierigkeiten verallgemeinern lassen.

Um für die Darstellung der allgemeinen Konstruktion in 7. alle Dualisierungen zur Verfügung zu haben, erschien es notwendig, die bisher in der Literatur nicht in befriedigender Weise vorhandene Ableitung einer spektralen Folge aus einem exakten Paar in einer abelschen Kategorie zu beschreiben. Das geschieht in 5.. Wir folgen dabei der in |29| angegebenen Methode mit Korrespondenzen. Es erscheint uns, daß einerseits die spektrale Folge allein nicht genügend Information für die Anwendungen liefert, andererseits die abgeleiteten exakten Paare mehr Information enthalten, als man benötigt, so daß wir einen Mittelweg beschreiten und die gewünschte Information in einem spektralen Diagramm zusammenfassen (5.1o4), das die spektrale Folge enthält. Hinzu kommt, daß die abgeleiteten exakten Paare bei der allgemeinen Konstruktion nicht mehr funktoriell von dem geometrischen oder algebraischen Problem abhängen; jedoch ist das spektrale Diagramm funktoriell.

Nach Fertigstellung dieses Teiles der Arbeit wurde uns bekannt, daß sich die Überlegungen von 5. im Inhalt zum großen Teil mit noch nicht veröffentlichten Untersuchungen von B.ECKMANN und P.HILTON decken, die jedoch mit anderen Methoden durchgeführt wurden. Die Formulierung der Ergebnisse in 5.

ist ECKMANN-HILTON-HUBER verpflichtet, da wesentliche Anregungen von |17| und |22| ausgingen.

In 1.-4. werden die Hilfsmittel für 5. bereitgestellt. Im Einzelnen: 1. enthält Bemerkungen zu graduierten Kategorien. Graduierte Kategorien wurden in z.B. |9| eingeführt als Verallgemeinerung von Kategorien, deren Objekte Folgen von Objekten einer gegebenen Kategorie sind. In einer graduierten Kategorie sind die Morphismenmengen Hom(A,B) Folgen oder Vereinigung einer Folge (In |9| direkte Summe). Bei der Komposition der Morphismen addieren sich die Grade, wodurch die Zuordnung f ——> grad f ein Morphismus (Funktor) von der betrachteten (graduierten) Kategorie in $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen) oder eine Gruppe (ein Monoid) wird. Verlangen wir, daß auf einer Kategorie ein Funktor in eine Gruppe gegeben ist, so kann man die $\mathrm{Hom}_p(A,B)$ als Urbilder von p durchschnitten mit Hom(A,B) definieren und bekommt eine graduierte Kategorie im Sinne von |9|. Vom Standpunkt der Theorie der Kategorien ist diese Definition die natürliche. Sie führt sofort zu kanonischen Definitionen von Funktoren und natürlichen Transformationen, die eine Verallgemeinerung der den Grad strikt erhaltenden (oder mit (-1) multiplizierenden) Funktoren von |9| sind. Wir beginnen in 1. mit der allgemeinen Definition und erläutern den Zusammenhang mit der üblichen Darstellung anschließend.

2. enthält graduierte quasiexakte Kategorien und 3. additive Kategorien. 2. und 3. zusammen liefern graduierte abelsche Kategorien. Vom logischen Standpunkt ist 2. überflüssig, da wir in 4. graduierte I-Kategorien einführen, die die graduierten abelschen Kategorien als Teilkategorien enthalten und nach |29| angeben, daß jede graduierte abelsche Kategorie im wesentlichen in genau einer Weise zu einer I-Kategorie erweitert werden kann. Wir könnten daher unter Verzicht auf 2. gleich mit I-Kategorien arbeiten. 2. erscheint jedoch, damit wir die Ergebnisse von 5. in bekannter Weise in einer abelschen Kategorie darstellen können.

Im Aufbau von 4. folgen wir |29| mit einigen Ergänzungen aus einer Vorlesung von D.PUPPE, die gelegentlich als Ausarbeitung durch den Verfasser erscheinen wird (|31|). Wir beschreiben die zur weiteren Verwendung benötigten Dualisierungen (s.u.) ausführlich und weichen bei der Homologie etwas von |29| ab. Damit wollen wir eine etwas allgemeinere Form erzielen, die später dann für die Behandlung des E_∞ - Terms der spektralen Folge ausreicht, der nicht von einem Randoperator herstammt, außerdem wollen wir die Voraussetzungen selbstdual formulieren, da wir später bei der Behandlung der spektralen Folge dadurch eine Arbeitsersparnis erreichen.

In 5. beginnen wir mit einem exakten Paar in einer abelschen Kategorie $\underline{A}$, die nach |29| zu einer I-Kategorie erweitert wird, so daß die Teilkategorie der eigentlichen Morphismen gerade $\underline{A}$ ist. Begännen wir gleich mit $\underline{K}$, so wären die Axiome (K4) - (K6) von 4.66., 4.69. entbehrlich: Die Tatsache, daß $\underline{K}_p(A,B)$ jeweils ein Verband ist, wird nur für A = N (I-Nullobjekt) oder B = N ausgenutzt. Daß $\underline{K}_p(N,B)$ und $\underline{K}_p(A,N)$ Verbände sind, wissen wir aber bereits nach Einführung von (K3) in 4.53., da in der dann quasiexakten Kategorie der eigentlichen Morphismen die Teile und Quotienten eines Objektes einen Verband bilden (2.2o., 4.59.). Für die Behandlung des E_∞ - Terms der spektralen Folge benötigt man die Verschärfung, daß in diesen Verbänden abzählbare Operationen erlaubt sind. Vermutlich (|29| 4.18.) kann man auch eine quasiexakte Kategorie an Stelle einer abelschen Kategorie zu einer I-Kategorie (mit (K1) - (K3)) erweitern. Da wir dieser Frage nicht nachgegangen sind, beschränken wir uns auf den abelschen Fall. Die Forderung, daß die $\underline{K}_p(A,B)$ abzählbar vollständige Verbände sind, ist bei Anwesenheit von (K1) - (K6) nicht schärfer als die Forderung, daß jeweils $\underline{K}_p(N,B)$ ein abzählbar vollständiger Verband ist, da aus letzterem folgt, daß die Teile eines jeden B in der abelschen Kategorie der eigentlichen Morphismen einen abzählbar vollständigen Verband bilden und andererseits jedes $\underline{K}_p(A,B)$ als Verband von Teilen einer graduierten Summe von A und B darstellbar ist (4.69. nach 4.72).

Wir setzen Kategorien als bekannt voraus und nehmen an, daß der Leser eine Aussage dualisieren kann, wenn die für den jeweiligen Zweck benötigte duale Kategorie kennt. Da die Dualisierungen bei I-Kategorien wegen der zwei einzeln dualisierbaren Strukturen (Komposition, Ordnung) etwas schwieriger sind, geben wir hier einen kurzen Hinweis auf die Möglichkeit der Formalisierung. Das dient auch der Vereinbarung der Terminologie: Man faßt die Theorie der Kategorien (mit Ordnung) auf als formale Theorie (|5|) mit Konstanten für die Menge der Morphismen $\underline{C}$ [1]), die Komposition K und Ordnung O (|8|, |32|, |7|). Wir bezeichnen meist $\underline{C}$ als Kategorie in Übereinstimmung mit den in Gruppentheorie, Algebra, Topologie etc. üblichen Verfahren. Die $f \varepsilon \underline{C}$ sind die Morphismen von $\underline{C}$, $|\underline{C}|$ bezeichnet die Menge der (nur für die Anwendungen interessanten) Objekte, die bijektiv den Einheiten von $\underline{C}$ entsprechen. Für einen Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ heißt A die Quelle und B das Ziel. Die Menge der Morphismen $A \longrightarrow B$ bezeichnen wir meist mit $\underline{C}(A,B)$.

---

[1]) Menge: Wir nehmen den Standpunkt von |32| ein. "Die" Kategorie der topologischen Räume etc. ist stets eine , so groß wie gewünschte, Kategorie.

Für Dualisierungen ist es zweckmäßig, auch die duale Komposition K* (Ordnung O*) einzuführen. K ist eine Teilmenge von $(\underline{C}\times\underline{C})\times\underline{C}$ (Graph einer Abbildung $\underline{C}\times\underline{C}\to\underline{C}$). K* ist $K^* := \{(f,g,h)\mid(g,f,h)\varepsilon K\}$ ($O^* := \{(f,g)\mid(g,f)\varepsilon O\}$). Setzt man K* (und, oder O*) für K (O) in die Axiome ein, so erhält man ableitbare Aussagen der Theorie, wenn man noch auf K* (O*) die definierende Gleichung anwendet.

Dualisierung besteht dann im Folgenden: Hat man eine ableitbare Aussage A über K (und, oder O), so erhält man durch Ersetzung von K (und, oder O) durch K* (O*) eine Aussage, die man noch durch Anwendung der definierenden Gleichung für K* und O* in eine Aussage über K (und, oder O) verwandelt. Diese Aussage ist in der Theorie ableitbar und heißt die zu A duale Aussage.

Formal geschickter geht man von einer Theorie mit Konstanten $\underline{C}$, K, K*, O, O* aus, so daß die Axiome bei Vertauschung von K mit K* (und, oder O mit O*) in ableitbare Aussagen übergehen und die Axiome ableitbare Aussagen der Theorie mit den eben gewonnenen Aussagen als Axiomen sind. In die Axiome wird der Zusammenhang $K^* = \{(f,g,h)\mid(g,f,h)\varepsilon K\}$ und $K = \{(f,g,h)\mid(g,f,h)\varepsilon K^*\}$ (analog für O,O*) mit aufgenommen. Das Dualitätsprinzip, ist dann ein Metamathematischer Satz über die Ableitbarkeit von Aussagen.

Diese Art der Dualisierung spielt unseres Erachtens in einigen Gebieten der Mathematik eine Rolle. Eine formale Fassung ist erst dann nötig, wenn die Aussagen so kompliziert werden, daß ihre Dualisierung ohne eine wenigstens teilweise Formalisierung nicht durchschaubar ist.

Als solches ist das Dualitätsprinzip trivial. Es ist nützlich, wenn man beim Aufbau einer Theorie von vornherein eine Liste zueinander dualer Begriffe (Terme) und Aussagen anlegt (z.B. Quelle und Ziel eines Morphismus; Einheit-Einheit; Nullmorphismus-Nullmorphismus (2.2.); injektiv-surjektiv; Kern-Cokern (2.5.,2.7.); Randoperator-Randoperator (4.5o.); Homologiemorphismus eines Randoperators d- Homologiemorphismus$^{\text{II}}_{\text{II}}$ von d(4.45)).

1. GRADUIERTE KATEGORIEN

1.1. Ein kovarianter oder kontravarianter Funktor $\mu:\underline{C} \longrightarrow \underline{M}$, dessen Zielkategorie $\underline{M}$ ein Monoid mit Einheit ist[1]), heißt eine Graduierung. Wir beschränken uns auf den Fall, daß $\underline{M} =: G$ eine abelsche Gruppe ist.

1.2. Ist $\mu':\underline{C}' \longrightarrow G'$ eine weitere Graduierung, so heißt ein Paar von Funktoren, die mit μ und μ' ein kommutatives Diagramm

(1.3)
$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \xrightarrow{\mu} & G \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{F}} \\ \underline{C}' & \xrightarrow{\mu'} & G' \end{array}$$
bilden, ein Funktor $(F,\bar{F}):\mu \longrightarrow \mu'$.

$(F,\bar{F})$ heißt kovariant (kontravariant), wenn F kovariant (kontravariant) ist.

1.4. Die Graduierungen und ihre Funktoren bilden eine Kategorie. Die kovarianten Funktoren sind darin als Teilkategorie enthalten.

1.5. Sind $(F,\bar{F}),(H,\bar{H}):\mu \longrightarrow \mu'$ zwei Funktoren gleicher Varianz, so heißt ein Paar von natürlichen Transformationen $h:F \longrightarrow H$, $\bar{h}:\bar{F} \longrightarrow \bar{H}$, die mit μ und μ' ein kommutatives Diagramm

(1.6)
$$\begin{array}{ccc} |\underline{C}| & \xrightarrow{|\mu|} & |G| \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} \\ |\underline{C}'| & \xrightarrow{|\mu'|} & |G'| \end{array}$$
bilden, eine natürliche Transformation $(h,\bar{h}):(F,\bar{F}) \longrightarrow (H,\bar{H})$ von $(F,\bar{F})$ in (H,H).

Die kovarianten (kontravarianten) Funktoren $\mu \longrightarrow \mu'$ und ihre natürlichen Transformationen bilden eine Kategorie. Da G nur ein Objekt hat, ist durch $(h,\bar{h}) \longrightarrow \bar{h}|G|$ eine Abbildung dieser Kategorien in G definiert. Diese Abbildungen sind Funktoren, also Graduierungen.

1.7. $\mu:\underline{C} \longrightarrow G$ sei eine Graduierung. Wir interessieren uns hauptsächlich für die Quellkategorie $\underline{C}$ von μ, unterdrücken μ in der Bezeichnung und nennen $\underline{C}$ eine G-graduierte oder graduierte Kategorie. μ denken wir uns dabei fest gegeben und mit $o_{\underline{C}}$ in die Struktur von $\underline{C}$ aufgenommen. Dann vereinbaren wir: Die $f \in \underline{C}_p := \mu^{-1}p$ heißen die Morphismen vom Grade p von $\underline{C}$, μf heißt der Grad von f und wir schreiben meist $|f|$ für μf. Für $A, B \in |\underline{C}|$ ist $\underline{C}_p(A,B) := \underline{C}(A,B) \cap \mu^{-1}p$ die Menge der Morphismen von A

---

[1]) Ein Monoid mit Einheit ist dasselbe wie eine Kategorie mit genau einem Objekt.

in B vom Grade p. Damit ist der Anschluß an die bekanntere Bezeichnungsweise hergestellt: Man hat Familien $(\underline{C}_p(A,B)|p\varepsilon G)$ für A, $B\varepsilon|\underline{C}|$, die $\underline{C}_p(A,B)$ sind paarweise disjunkt für verschiedene Tripel (p,A,B), weil $\underline{C}$ eine Kategorie und μ eine Abbildung ist; die Einheiten von $\underline{C}$ haben den Grad o und es gilt $\underline{C}_p(A,B)\times \underline{C}_q(B,C) \xrightarrow{\circ} \underline{C}_{q+p}(A,C)$ für die Komposition $\circ$ von $\underline{C}$, da μ ein Funktor ist.

1.8. Beispiel: $\underline{C}$ sei eine Kategorie und G eine abelsche Gruppe. $\underline{C}^G$ bezeichne die graduierte Kategorie mit:
(D1) Objekte von $\underline{C}^G$ sind die Familien $(A_p|p\varepsilon G)$ mit $A_p\varepsilon|\underline{C}|$,
(D2) Ein Morphismus $f:A \longrightarrow B$ vom Grade q von $\underline{C}^G$ ist eine Familie $f = (f_p|p\varepsilon G)$ von Morphismen $f_p:A_p \longrightarrow B_{p+q}$ von $\underline{C}$,
(D3) Die Komposition der Morphismen erfolgt komponentenweise.

Ist dabei $\underline{C}$ bereits graduiert, $\mu':\underline{C} \longrightarrow G'$, so verlangen wir, daß die f_p in $f = (f_p|p\varepsilon G)$ sämtlich den gleichen Grad in μ' haben. Hat $\underline{C}$ bereits die spezielle Form $\underline{C}'^{G'}$, so ist $(\underline{C}'^{G'})^G$ kovariant isomorph zu $\underline{C}'^{G\times G}$ und wir identifizieren diese Kategorien. Die Identifizierung ist durch $((A_{p,q}|p\varepsilon G')|q\varepsilon G) \longrightarrow (A_{p,q}|p\varepsilon G', q\varepsilon G)$ und entsprechend für die Morphismen gegeben.

1.1o. Zur Dualisierung von Aussagen über graduierte Kategorien (Graduierungen) dient die Vereinbarung: Ist $\mu:\underline{C} \longrightarrow G$ eine Graduierung, so wird die duale Kategorie $\underline{C}^*$ von $\underline{C}$ mit der Graduierung $\mu^* := -\mu$ versehen. Das entspricht $\underline{C}^*_p(A,B) = \underline{C}_{-p}(B,A)$ (|9|). Man könnte hier anders vorgehen, jedoch erscheint diese Definition in unserem Zusammenhang die günstigste (vgl.4.7.).

1.11. Das Vorkommen von $\bar{F}$ in der Definition der Funktoren (1.2.) verallgemeinert den üblichen Begriff (|9|) dahin, daß die Kategorien $\underline{C}$ und $\underline{C}'$ mit verschiedenen Gruppen graduiert sein können. Die Grade der Morphismen von $\underline{C}$ brauchen bei F nicht erhalten zu bleiben, sondern können mit einem Gruppenhomomorphismus $\bar{F}$ abgeändert werden. Statt von einem Funktor $(F,\bar{F}):\mu \longrightarrow \mu'$ von Graduierungen sprechen wir von einem Funktor $(F,\bar{F}):\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$. $\bar{F}$ unterdrücken wir gelegentlich in der Bezeichnung.

1.12. Beispiel: Ist $\underline{C}$ eine Kategorie und $\Delta_{\underline{C}}:\underline{C} \longrightarrow \underline{C}^*$ der durch die identische Abbildung von $\underline{C}$ definierte Funktor, so ist für irgendeine Graduierung $\mu:\underline{C} \longrightarrow G$ der Funktor $(\Delta_{\underline{C}},-1):\mu \longrightarrow \mu^*$ eine kontravariante Äquivalenz von Graduierungen (graduierten Kategorien).

1.13. Ist $\underline{C}$ eine Kategorie, $\mu:\underline{C}' \longrightarrow G'$ eine Graduierung, so bezeichnen wir als Funktor $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ jeden Funktor von Graduierungen $(\underline{C} \longrightarrow N) \longrightarrow \mu$, wo N die Gruppe bezeichnet, die nur aus einem Element besteht. Den Morphismen von $\underline{C}$ werden bei Anwendung des Funktors also Morphismen vom Grade o in $\underline{C}'$ zugeordnet.

1.14. Beispiel: $\underline{Top}$ sei die Kategorie der topologischen Räume, $\underline{AbGr}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Ordnet man jedem $X \varepsilon |\underline{Top}|$ die Folge $HX := (H_n X | n \varepsilon \mathbb{Z})$ seiner singulären Homologiegruppen und jedem $f \varepsilon \underline{Top}$ die Folge der $H_n f: H_n X \longrightarrow H_n Y$ zu, so ist H ein Funktor $\underline{Top} \longrightarrow \underline{AbGr}^{\mathbb{Z}}$.

1.15. Ist $\mu:\underline{C} \longrightarrow G$ eine Graduierung, so ist $\underline{C}_o = \mu^{-1} o$ eine Teilkategorie von $\underline{C}$. Die Einbettung $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{C}$ ist ein Funktor von graduierten Kategorien.

1.16. Sind $(F,\bar{F}),(H,\bar{H}):\mu \longrightarrow \mu'$ zwei kovariante (kontarvariante) Funktoren, so bedeutet in der Definition der natürlichen Transformation in 1.5. die Forderung $\bar{h}:\bar{F} \longrightarrow \bar{H}$ sei eine natürliche Transformation, daß $\bar{F} = \bar{H}$ sein muß. Die Kommutativität von (1.6) bedeutet, daß sämtliche Morphismen hX für $X \varepsilon |\underline{C}|$ den gleichen Grad $\bar{h}|G|$ haben sollen. $\bar{h}|G|$ heißt der Grad der natürlichen Transformation $(h,\bar{h})$, da wie in 1.5. bemerkt die $(h,\bar{h})$ eine graduierte Kategorie bilden.

1.17. Beispiel: Bei einer etwas anderen Auffassung der Homologie (1.14.) als Funktor von Diagrammen $A \subset X \subset (X,A)$ von Paaren topologischer Räume ist der Randoperator $d:H(X,A) \longrightarrow HA$ eine natürliche Transformation vom Grade -1 zwischen zwei (noch genauer zu definierenden) Funktoren.

2. QUASIEXAKTE KATEGORIEN

2.1. $\underline{C}$ sei eine G-graduierte Kategorie. Wir sprechen von einer Familie von Nullmorphismen in $\underline{C}$, wenn zu jedem (p,A,B) mit $p\varepsilon G$, $A,B\varepsilon|\underline{C}|$ ein Morphismus $O^p_{BA}\varepsilon\underline{C}_p(A,B)$ (Nullmorphismus) gegeben ist mit

(NM) $O^p_{CB}f = O^{p+q}_{CA} = gO^q_{BA}$ für $f\varepsilon\underline{C}_p(A,B)$, $g\varepsilon\underline{C}_q(A,B)$.

Wir lassen die Indizes meist fort und schreiben suggestiver

(2.2) $Of = O = gO$.

$\underline{C}$ mit einer Familie von Nullmorphismen heißt eine graduierte Kategorie mit Nullmorphismen.
In $\underline{C}$ existiert wegen $O' = O'O = O$ für jede weitere Familie von Nullmorphismen O' höchstens eine solche Familie.
Mit $\underline{C}$ ist $\underline{C}^*$ eine graduierte Kategorie mit Nullmorphismen.

2.3. Ein Objekt $N\varepsilon|\underline{C}|$ mit

(NO) $\underline{C}_p(N,A)$ und $\underline{C}_p(A,N)$ bestehen für jedes p, A aus einem Element

heißt ein Nullobjekt von $\underline{C}$. Bezeichnen wir $O^p_{AN}\ \varepsilon\ \underline{C}_p(N,A)$, $O^p_{NA}\varepsilon\ \underline{C}_p(A,N)$, so ist $O^p_{BA} := O^r_{BN}O^s_{NA}$ (für irgendeine Wahl $r+s=p$) eine Familie von Nullmorphismen.
Je zwei Nullobjekte von $\underline{C}$ sind äquivalent. In einer Kategorie mit Nullmorphismen ist ein Nullobjekt bereits durch $\underline{C}_o(N,N) = \{O^o_{NN}\}$,
d.h. $1_N = O^o_{NN}$, charakterisiert.
Ist N Nullobjekt von $\underline{C}$, so ist N ebenfalls Nullobjekt von $\underline{C}^*$.

2.4. Ein Funktor $F:\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ von graduierten Kategorien mit Nullmorphismen heißt Nullmorphismentreu, wenn F Nullmorphismen von $\underline{C}$ in Nullmorphismen von $\underline{C}'$ abbildet. Existieren Nullobjekte in $\underline{C}$, so ist F Nullmorphismentreu, genau wenn FN Nullobjekt in $\underline{C}'$ ist (für ein Nullobjekt $N\varepsilon|\underline{C}|$).

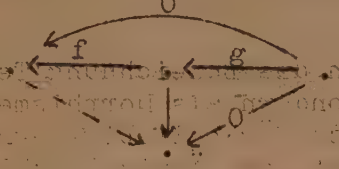
2.5. f, g seien zwei Morphismen in einer graduierten Kategorie $\underline{C}$ mit Nullmorphismen. f heißt ein Kern von g, wenn
(Ker 1) $gf = O$ ist,
(Ker 2) zu $h\varepsilon\underline{C}$ mit $gh = O$ ein $h'\varepsilon\underline{C}$ existiert mit $fh' = h$,
(Ker 3) f injektiv ist.

Bekanntlich faßt man die Bedingungen in dem Diagramm

(2.6)

zusammen, wobei die Eindeutigkeit des gestrichelten Pfeiles (<==> f injektiv) angenommen wird.

2.7. Dual ist ein Cokern f von g charakterisiert durch das Diagramm

(2.8) 

. Ein Kern eines Cokerns von f heißt ein Bild von f, ein Cokern eines Kerns heißt ein Cobild.

2.9. Ein Diagramm $\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$ heißt eine kurze exakte Folge, in Zeichen f||g, wenn

(KE) f ein Kern von g und g ein Cokern von f ist.

Der Begriff der kurzen exakten Folge ist "selbstdual", genauer ist "f|| g in $\underline{C}$" äquivalent mit "g|| f in $\underline{C}^*$".

2.1o. Für $f: A \longrightarrow B$ aus $\underline{C}$ heißt ein Diagramm

(2.11) $\cdot \xrightarrow{k} A \xrightarrow{b} \cdot \xrightarrow{\phi} \cdot \xrightarrow{b'} B \xrightarrow{k'} \cdot$ mit

(A1) $b'\phi b = f$,

(A2) ϕ ist eine Äquivalenz und

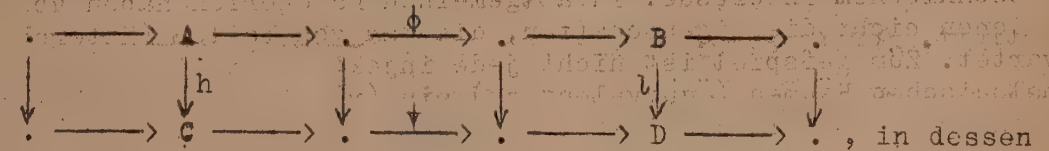
(A3) k|| b und b'|| k'

eine Analyse von f. Die Analyse heißt vom Grade o, wenn $|k|=|b|=|b'|=|k'|=o$ ist (==> $|\phi|=|f|$).

Hat man ein kommutatives Diagramm

(2.12) $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$ und existieren

Analysen von f und g, so gibt es genau ein kommutatives Diagramm

(2.13) 

, in dessen Zeilen die gegebenen Analysen von f und g stehen. Dabei kann f = g, die Analysen können verschieden und es darf $h = 1_A$, $l = 1_B$ sein. In diesem Falle sind die senkrechten Pfeile Äquivalenzen.

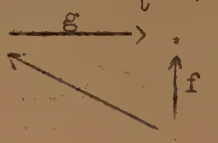
2.14. Existiert in $\underline{C}$ zu jedem f (mindestens) eine Analyse vom Grade o, so heißt $\underline{C}$ eine graduierte quasiexakte Kategorie. Jede Auswahl einer

festen Analyse zu den $f \varepsilon \underline{C}$ definiert nach den Bemerkungen zu (2.12,2.13) einen Funktor (von der Kategorie mit Objekten $\underline{C}$ und Morphismen (2.12) in die Kategorie mit Objekten (2.11) und Morphismen (2.13)).

Ist $\underline{C}$ quasiexakt, so ist $\underline{C}^*$ quasiexakt.
Jede quasiexakte Kategorie hat ein Nullobjekt.

2.15. Ein Funktor $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ von graduierten quasiexakten Kategorien heißt exakt, wenn er kurze exakte Folgen in kurze exakte Folgen abbildet. Exakte Funktoren sind Nullmorphismentreu und bilden Analysen in Analysen ab.

2.16. $\underline{C}$ sei eine graduierte Kategorie. Für $f, g \varepsilon \underline{C}$ heißt $f <_l g$ (f links kleiner als g), wenn ein kommutatives Diagramm



(2.17) in $\underline{C}$

existiert. Für $<_l$ gilt:

(SO1) $f <_l f$ für jedes f und
(SO2) $f <_l g <_l h \Longrightarrow f <_l h$,

$<_l$ ist also eine schwache Ordnung (s-Ordnung) in $\underline{C}$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_l$ durch

(2.18) $f \sim_l g :\Longleftrightarrow f <_l g$ und $g <_l f$.

Ist $f \sim_l g$ und sind f und g injektiv, so sind ihre Quellen äquivalent (natürlich haben f und g dasselbe Ziel). Wir beschränken $\sim_l$ auf die Injektionen von $\underline{C}$ und setzen voraus, daß $\underline{C}$ quasiexakt ist. Jede $\sim_l$-Äquivalenzklasse von Injektionen von $\underline{C}$ enthält (mindestens) einen Morphismus vom Grade o. Aus jeder Äquivalenzklasse wählen wir einen solchen Repräsentanten, und fassen für $A \varepsilon |\underline{C}|$ die Repräsentanten mit Ziel A zu einer Menge TeiA zusammen. Die $f \varepsilon$ TeiA heißen die Teile von A [1]). Beschränkt

---

[1]) Üblicherweise "Unterobjekte"; wir ziehen die Bezeichnung "Teil" vor, da wir die Teile nicht als Objekte von $\underline{C}$ sondern als Morphismen eingeführt haben. Die Überlegungen gelten genauso für beliebige (graduierte) Kategorien, mit der Einschränkung, daß nicht jede Äquivalenzklasse von Injektionen einen Morphismus vom Grade o enthält. Dies ist natürlich nur von technischem Interesse. In allgemeinen Kategorien haben aber die Injektionen nicht die Eigenschaften, die man von Teilen (Unterobjekten) erwartet. Zum Beispiel ist nicht jede injektive stetige Abbildung von topologischen Räumen (äquivalent zu) eine(r) Einbettung (Inklusion). Jedoch erhält man in quasiexakten Kategorien gerade das Gewünschte. Da wir hierauf nicht näher eingehen können, möge der Leser sich nach Erscheinen in |31| informieren.

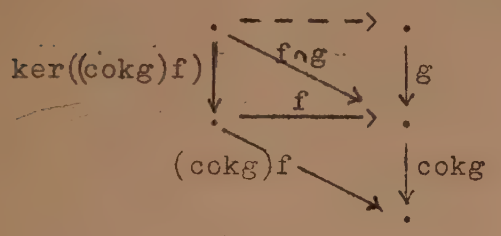
auf TeiA ist $<_l$ eine teilweise Ordnung (t-Ordnung), das heißt über (SO1,2) hinaus gilt

(TO) $f<_l g$ und $g<_l f$ ===> $f = g$.

TeiA besitzt ein minimales und ein maximales Element. Als minimales Element sei ein $O:N \longrightarrow A$, als maximales Element sei 1_A gewählt.

2.19. Dualisierung liefert eine s-Ordnung $<_r$ (rechts kleiner) in C, eine Äquivalenzrelation $\sim_r$ und nach Voraussetzung, daß C quasiexakt sei, eine t-geordnete Menge QuoA von Surjektionen mit Quelle A. Die $f \varepsilon QuoA$ heißen die Quotienten von A. Als minimales Element von QuoA wählen wir ein $A \longrightarrow N$ und als maximales Element 1_A.

2.20. TeiA und QuoA sind Verbände. Wir bezeichnen die Verbandsoperationen jeweils mit $\wedge$(Infimum,Durchschnitt) und $\vee$(Supremum, Vereinigung). $f \wedge g$ in TeiA erhält man z.B. als fker((cokg)f), wie in dem Diagramm



illustriert [1]). Dual erhält man $f \wedge g$ in QuoA. $f \vee g$ in TeiA erhält man nach 2.22. als $f \vee g$ = kercokf$\vee$kercokg = ker(cokf$\wedge$cokg).$\vee$ in QuoA erhält man dual.
In abelschen Kategorien (3.) hat man eine einfachere Charakterisierung mit Hilfe der direkten Summe (|21|1.4.).

2.21. C sei eine graduierte quasiexakte Kategorie. Zu $f \varepsilon C$ wählen wir eine feste Analyse (2.11) sc, daß $k \varepsilon TeiA$, $b \varepsilon QuoA$, $b' \varepsilon TeiB$, $k' \varepsilon QuoB$ ist. ϕ von (2.11) bezeichnen wir mit $\bar{f}$. Es ist
(Kern) k ein Kern von f,
(Cokern) k' ein Cokern von f,
(Bild) b' ein Bild von f
(Cobild) b ein Cobild von f.
Wir definien k =: kerf, k' =: cokf, b' =: bilf, b =: cobf. Dabei sind bilf = kercokf und cobf = cokkerf zueinander dual, da ker und cok zueinander dual sind (2.7.).
Mit Kerf etc. bezeichnen wir die Quelle von kerf etc., wie in

$$\text{Kerf} \xrightarrow{\text{kerf}} A \xrightarrow{\text{cobf}} \text{Cobf} \xrightarrow{\bar{f}} \text{Bilf} \xrightarrow{\text{bilf}} B \xrightarrow{\text{cokf}} \text{Cokf}.$$

---

[1]) Zur Bezeichnung ker, cok etc. vergleiche man 2.21.

Kerf etc. sind durch kerf etc. eindeutig bestimmt, jedoch gilt nicht das Umgekehrte, eine Tatsache, die man bei Moduln meist vernachlässigt.

2.22. Für $f \varepsilon TeiA$ ist $cokf \varepsilon QuoA$, für $g \varepsilon QuoA$ ist $kerg \varepsilon TeiA$. Die Abbildungen cok:TeiA $\longrightarrow$ QuoA und ker:QuoA $\longrightarrow$ TeiA sind für festes A zueinander invers. Man beachte aber, daß die Abbildungen ordnungsantihomomorph sind ($f <_l g \Longrightarrow cokf >_r cokg$), wie man leicht aus (2.12,2.13) schließt. Im Gegensatz dazu geht $<_l$ (nach Definition) in $<_r$ über beim Dualisieren von $\underline{C}$.

2.23. Ein Diagramm $\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$ in $\underline{C}$ heißt exakt, wenn bilf = kerg ist. Da dies mit cokf = cobg äquivalent ist, ist $\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$ in $\underline{C}$ exakt, genau wenn $\cdot \xleftarrow{f} \cdot \xleftarrow{g} \cdot$ in $\underline{C}^*$ exakt ist.
Die Exaktheit von längeren Folgen definiert man als Exaktheit an jeder Stelle. Exakte Funktoren bilden exakte Folgen in exakte Folgen ab.
$\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$ ist kurz exakt, genau wenn $N \longrightarrow \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \longrightarrow N$ exakt ist.

3. ADDITIVE UND ABELSCHE KATEGORIEN

3.1. Eine graduierte Kategorie $\underline{C}$ mit Nullobjekt heißt additiv, wenn

(AK1) Die $\underline{C}_p(A,B)$ abelsche Gruppen sind und die Komposition
$\underline{C}_p(A,B) \times \underline{C}_q(B,C) \longrightarrow \underline{C}_{q+p}(A,C)$ bilinear ist und

(AK2) Zu $A,B \in |\underline{C}|$ ein Diagramm $A \underset{p_A}{\overset{i_A}{\rightleftarrows}} C \underset{p_B}{\overset{i_B}{\leftrightarrows}} B$ mit Morphismen vom Grade o existiert mit $p_A i_A = 1_A$, $p_B i_B = 1_B$ und $i_A p_A + i_B p_B = 1_C$[1]).

Wegen $p_B i_A = p_B(i_A p_A + i_B p_B) i_A = p_B i_A p_A i_A + p_B i_B p_B i_A = p_B i_A + p_B i_A$ folgert man aus (AK2) $p_B i_A = 0$ und $p_A i_B = 0$ wie üblich.

3.2. Eine graduierte additive Kategorie ist bei Vernachlässigung der Graduierung im allgemeinen keine additive Kategorie, da die Addition der Morphismen $A \longrightarrow B$ nur für Morphismen des gleichen Grades erklärt ist. Im übrigen gelten die üblichen Folgerungen, wie zum Beispiel:

(3.3) Die neutralen Elemente der Addition in den $\underline{C}_p(A,B)$ bilden eine Familie von Nullmorphismen in $\underline{C}$.

Wir setzen additive Kategorien als bekannt voraus und vereinbaren nur die Terminologie.

Wir weisen jedoch darauf hin, daß hier $\underline{C}(A,B)$ Vereinigung einer Familie $(\underline{C}_p(A,B) \mid p \in G)$ paarweise disjunkter abelscher Gruppen ist im Gegensatz zu |9| mit $\underline{C}(A,B) = \bigoplus (\underline{C}_p(A,B) \mid p \in G)$.

3.4. C von (AK2) heißt eine direkte Summe von A und B. Je zwei direkte Summen von A und B sind äquivalent. Nach Auswahl schreibt man $A \oplus B$ und vereinbart $N \oplus A = A = A \oplus N$ für jedes A.

3.5. Da die Addition in den $\underline{C}_p(A,B)$ kommutativ ist, läßt sich in der dualen Kategorie $\underline{C}^*$ von $\underline{C}$ eine Addition nur auf eine vernünftige Weise aus der Addition von $\underline{C}$ definieren: Man setzt $\underline{C}^*_p(A,B) := \underline{C}_{-p}(B,A)$ als abelsche Gruppen. $\underline{C}^*$ ist eine graduierte additive Kategorie.

3.6. Beispiel: Ist $\underline{C}$ eine additive Kategorie, G eine abelsche Gruppe, so ist $\underline{C}^G$ (1.9.) eine G-graduierte additive Kategorie, wenn man $f + g$ durch $(f + g)_p := f_p + g_p$ definiert.

---

[1]) Die Axiome sind nicht minimal.

3.7. Ein Funktor $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ von graduierten additiven Kategorien heißt additiv, wenn

(FA) $F(f + g) = (Ff) + (Fg)$ ist.

Bekanntlich ist diese Bedingung äquivalent mit

(FA') $F(A \oplus B) = (FA) \oplus (FB)$ (bis auf Auswahl).

Mit (FA') ist gemeint, daß ein $\underline{C}$-Diagramm (AK2) in ein $\underline{C}'$-Diagramm übergeht, das den entsprechenden Bedingungen genügt (bei kontravariantem F unter Vertauschung der Rolle der i und p).

Wegen (3.3) sind additive Funktoren Nullmorphismentreu.

3.8. $\underline{C}$ heißt eine G-graduierte additive Kategorie mit Einhängung (z.B.|28|), wenn $\underline{C}$ G-graduiert additiv ist und man in (AK2) die Grade der i_A, i_B beliebig in G vorschreiben kann. Man hat dann für jedes $A \in |\underline{C}|$ und $p \in G$ ein Diagramm $A \underset{p_A}{\overset{i_A}{\rightleftarrows}} C \underset{p_N}{\overset{i_N}{\rightleftarrows}} N$ mit $|i_A| = p$. Man stellt fest, daß i_A eine Äquivalenz ist. Mit der Existenz von solchen Äquivalenzen $A \longrightarrow C$ von vorgeschriebenem Grad - und eventuell einer Verträglichkeitsbedingung - kann man die Einhängung in nichtadditiven Kategorien definieren (vgl. z.B.|28|, dort etwas schärfer und nur für additive Kategorien, jedoch unabhängig von der Addition und daher auch allgemeiner gültig).

In einer Kategorie der Form $\underline{C}^G$ kann man die Einhängung einfach durch eine Indexverschiebung definieren, wie wir dies in 1o.4. tun werden.

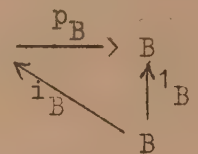
3.9. Eine graduierte additive quasiexakte Kategorie $\underline{C}$ heißt eine graduierte abelsche Kategorie. Mit $\underline{C}$ ist auch $\underline{C}^*$ eine graduierte abelsche Kategorie.

3.1o. Exakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien sind additiv (und daher die richtigen Strukturfunktoren für (graduierte) abelsche Kategorien).

Die Behauptung ist Corollar der beiden Lemmata:

LEMMA 1: Gilt in $A \underset{p_A}{\overset{i_A}{\rightleftarrows}} C \underset{p_B}{\overset{i_B}{\rightleftarrows}} B$ $p_A i_A = 1_A$, $p_B i_B = 1_B$ und $i_A p_A + i_B p_B = 1_C$, so ist $A \xrightarrow{i_A} C \xrightarrow{p_B} B$ kurz exakt (und dual $A \xleftarrow{p_A} C \xleftarrow{i_B} B$ kurz exakt).

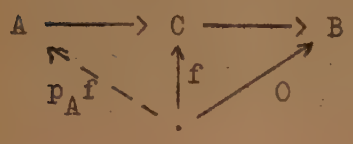
LEMMA 2: Ist in $A \xrightarrow{i_A} C \xrightarrow{p_B} B$



die Zeile kurz exakt und

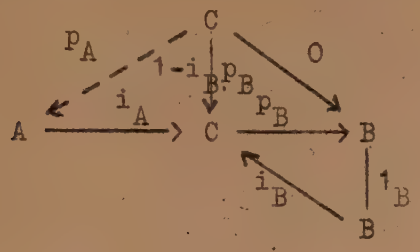
$p_B i_B = 1_B$, so existiert $p_A : C \longrightarrow A$ mit $p_A i_A = 1_A$ und $i_A p_A + i_B p_B = 1_C$. Für jeden Morphismus $q : C \longrightarrow A$ mit $q i_A = 1_A$ und $q i_B = 0$ ist $q = p_A$.

Beweis von Lemma 1: $p_B i_A = 0$ wurde in 3.1. gezeigt. i_A ist injektiv wegen $p_A i_A = 1_A$. Sei (Diagramm) $p_B f = 0$. Dann ist $f = 1_C f = (i_A p_A + i_B p_B) f =$



$= i_A p_A f + i_B p_B f = i_A (p_A f)$, also ist i_A ein Kern von p_B. Daß p_B ein Cokern von i_A ist, schließt man dual nach Vertauschung von A und B.

Beweis von Lemma 2: In dem Diagramm



ist $p_B(1-i_B p_B) = p_B - i_B p_B i_B =$ $= p_B - p_B = 0$, daher existiert p_A mit $i_A p_A = 1 - i_B p_B$ (Exaktheit). $p_A i_A = 1_A$ folgt aus $i_A p_A i_A = (1 - i_B p_B) i_A = i_A - i_B p_B i_A = i_A = i_A 1_A$, da $p_B i_A = 0$ (xaktheit) und i_A injektiv ist. Ist $q : C \longrightarrow A$ ein Morphismus mit $q i_A = 1_A$ und $q i_B = 0$, so ist $q = q(i_A p_A + i_B p_B) = q i_A p_A + q i_B p_B = q i_A p_A = p_A$.

Schließlich seien $\underline{A}$, $\underline{B}$ graduierte abelsche Kategorien und $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein (kovarianter) exakter Funktor. Man geht aus von einem direkten Summendiagramm wie in (AK2), nach Lemma 1 ist dann $A \xrightarrow{i_A} C \xrightarrow{p_B} B$ kurz exakt und , da F ein exakter Funktor ist, ist $FA \xrightarrow{Fi_A} FC \xrightarrow{Fp_B} FB$ kurz exakt. Wegen $(Fp_B)(Fi_B) = 1_B$ existiert $p : FC \longrightarrow FA$ mit $(Fi_A)p = 1_C - (Fi_B)(Fp_B)$ und $pFi_A = 1_A$ (Lemma 2). Mit $(Fp_A)(Fi_A) = 1_{FA}$, $(Fp_A)(Fi_B) = 0$ (exakte Funktoren sind Nullmorphismentreu) ist $p = Fp_A$ nach Lemma 2.

Wesentlich für den Beweis (des Corollars) ist, daß ein direktes Summendiagramm in $\underline{A}$ mit F eine kurze exakte Folge in $\underline{B}$ liefert. Unter einer solchen Voraussetzung erscheint das Corollar in anderen Fällen, wenn $\underline{A}$ nicht quasiexakt aber additiv ist ((8.13),|13|).

3.11. Beispiel: Ist $\underline{C}$ eine abelsche Kategorie, G eine abelsche Gruppe, so ist $\underline{C}^G$ eine graduierte abelsche Kategorie (additiv 3.6.). Für $f : A \longrightarrow B$ vom Grade q ist $(\ker f)_p = \ker f_p$, $(\operatorname{cob} f)_p = \operatorname{cob} f_p$ aber

$$(\operatorname{cok} f)_p = \operatorname{cok} f_{p-q}, (\operatorname{bil} f)_p = \operatorname{bil} f_{p-q}.$$

4. I-KATEGORIEN (|29|)

4.1. Eine graduierte Kategorie $\underline{C}$ heißt geordnet, wenn die $\underline{C}_p(A,B)$ nicht leere t-geordnete Mengen sind - wir bezeichnen die Ordnung mit $<$ -, so daß gilt [1]):

(O) Die Komposition der Morphismen ist biordnungshomomorph, d.h.

(a) $f_1 < f_2 \Longrightarrow gf_1 < gf_2$,

(b) $g_1 < g_2 \Longrightarrow g_1 f < g_2 f$.

4.2. Für eine graduierte geordnete Kategorie $\underline{C}$ definieren wir:

(4.3) Die Kategorie $\bar{\underline{C}}$ durch Beibehaltung der Komposition und Graduierung, aber Umkehrung (Dualisierung) der Ordnung. $\bar{\underline{C}}$ ist eine graduierte geordnete Kategorie.

(4.4) In $\underline{C}^*$ definieren wir die Ordnung wie in $\underline{C}$, das heißt, es ist $\underline{C}^*_p(A,B) = \underline{C}_{-p}(B,A)$ als geordnete Menge. $\underline{C}^*$ ist eine graduierte geordnete Kategorie.

Dualisierung von Aussagen in $\underline{C}$ mittels $\bar{\underline{C}}$ heißt O-Dualisierung, mittels $\underline{C}^*$ K-Dualisierung. Die für unsere Anwendungen wichtigste Dualisierung ist die mittels $\bar{\underline{C}}^* = \overline{\underline{C}^*}$, die K-O-Dualisierung heißen möge.

4.5. Eine graduierte geordnete Kategorie $\underline{C}$ heißt eine graduierte geordnete Kategorie mit Involution oder graduierte I-Kategorie, wenn eine Abbildung $\underline{C}_p(A,B) \ni f \longrightarrow f^{\sharp\sharp} \in \underline{C}_{-p}(B,A)$ gegeben ist mit

(I1) $1^{\sharp\sharp} = 1$ und $(gf)^{\sharp\sharp} = f^{\sharp\sharp} g^{\sharp\sharp}$,

(I2) $f^{\sharp\sharp\sharp\sharp} = f$,

(I3) $f_1 < f_2 \Longrightarrow f_1^{\sharp\sharp} < f_2^{\sharp\sharp}$.

$^{\sharp\sharp}$ heißt Involution von $\underline{C}$. Mit $\underline{C}$ sind auch $\bar{\underline{C}}$ und $\underline{C}^*$ graduierte I-Kategorien (natürlich dann auch $\bar{\underline{C}}^*$): $\bar{\underline{C}}$ und $\underline{C}^*$ stimmen als Mengen mit $\underline{C}$ überein, man wählt dasselbe $^{\sharp\sharp}: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$.

4.6. Ein Funktor $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ von graduierten geordneten Kategorien heißt ordnungshomomorph, wenn

(OH) $f < g \Longrightarrow Ff < Fg$ gilt.

---

[1]) t-Ordnung: Es gilt (SO1,2) und (TO) von 2.16..

Sind $\underline{C}$ und $\underline{C}'$ graduierte I-Kategorien, so heißt F ein I-Funktor, wenn (OH) gilt und

(IF) $F(f^{\#}) = (Ff)^{\#} =: Ff^{\#}$ ist [1]).

4.7. Die Definition der Involution ist äquivalent mit: $(^{\#},-1):\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ ist ein ordnungshomomorpher kontravarianter Funktor, dessen Quadrat die Identität von $\underline{C}$ ist. Daraus folgt, daß $(^{\#},-1)$ durch Zusammensetzung mit $(\Delta_{\underline{C}},-1):\underline{C} \longrightarrow \underline{C}^*$ (1.12.) eine kovariante Äquivalenz von graduierten geordneten Kategorien $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}^*$ definiert [3]), bei der die Grade der Morphismen erhalten bleiben [2]). Trivial ist, daß $(\Delta_{\underline{C}}{}^{\#},1):\underline{C} \longrightarrow \underline{C}^*$ darüberhinaus ein I-Funktor, also eine kovariante Äquivalenz von I-Kategorien, ist. Daraus folgert man, daß eine Aussage in einer graduierten I-Kategorie $\underline{C}$ genau dann gilt, wenn die duale Aussage in $\underline{C}$ gilt. Unter Hinzuziehung der Involution wäre also z.B. 4.1.(Ob) entbehrlich und erscheint auch nicht in |29|. Bei Einführung weiterer Axiome werden wir daher nur auf die O-Dualität achten. Da wir nicht präzisiert haben, was eine Aussage in einer I-Kategorie ist, ist die vorstehende Bemerkung eine unbewiesene Arbeitshypothese. Die Anwendung erfolgt jedoch stets in so einfachen Fällen, daß man unschwer mit Hilfe von $^{\#}$ die duale (K-duale) Aussage (oder eine äquivalente Aussage) herstellen kann. Selbstverständlich kann man mit Hilfe der Bemerkungen über Dualität in der Eileitung das benötigte Metatheorem über I-Kategorien herleiten. Allgemein gilt natürlich in jeder Kategorie, deren Axiome selbstdual formuliert sind, mit jeder ableitbaren Aussage auch die duale Aussage. Das Metatheorem ist hier, etwas präziser als oben angedeutet formuliert, wesentlich weitergehend: In einer graduierten I-Kategorie ist bei Hinzunahme einer beliebigen (in graduierten I-Kategorien formulierbaren) Aussage zu den Axiomen die duale Aussage aus dem erweiterten Axiomensystem ableitbar.

Für den Rest von 4. sei $\underline{K}$ eine graduierte I-Kategorie, "$\underline{K}$" soll an Korrespondenzen erinnern (|29|). Wir geben die Axiome von |29| an mit den für die Graduierung notwendigen Änderungen und stellen die in 5. benötigten Rechenregeln von |29| ohne Beweis zusammen.

---

[1]) Wir bezeichnen die Involutionen in $\underline{C}$ und $\underline{C}'$ gleich. Da wir bisher keine I-Nullobjekte einführten, unterscheiden sich unsere I-Funktoren noch von |29|4.3..

[2]) Dies ist der Grund für die Definition $\mu^* := -\mu$ in 1.1o..

[3]) Im offensichtlichen Sinne. Wir wollen nicht die entsprechende Kategorie einführen, in der der Funktor eine Äquivalenz ist.

4.8. AXIOM (K1): In $\underline{K}$ existiert ein Objekt N mit

(N1) $\underline{K}_o(N,N) = \{1_N\}$,

(N2) $\underline{K}_o(N,A)$ besitzt ein größtes Element W_{AN} und einkleinstes Element w_{AN}[1].

N heißt I-Nullobjekt von $\underline{K}$ und ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt. N ist im allgemeinen nicht Nullobjekt im Sinne von 2.3.. Wir schreiben trotzdem N im Hinblick auf 4.33.. Gilt (K1) in $\underline{K}$ so auch in $\bar{\underline{K}}$ und N ist 1-Nullobjekt von $\bar{\underline{K}}$, die Rollen von W und w vertauschen sich. Nach 4.7. gilt (K1) in $\underline{K}^*$, N ist I-Nullobjekt von $\underline{K}^*$, wir schreiben W_{NA} (w_{NA}) für das größte (kleinste) Element von $\underline{K}^*_o(N,A) = \underline{K}_o(A,N)$ und es ist $W_{NA} = W_{AN}^{\#\#}$ und O-dual $w_{NA} = w_{AN}^{\#\#}$.

Einen I-Funktor $\underline{K} \longrightarrow \underline{K}'$ von graduierten I-Kategorien bezeichnen wir als I-Nullobjekttreu, wenn er I-Nullobjekte von $\underline{K}$ in I-Nullobjekte von $\underline{K}'$ abbildet. Die Existenz von I-Nullobjekten in $\underline{K}$ impliziert dann die Existenz in $\underline{K}'$.

Man folgert:

(4.9) $\underline{K}_p(N,N)$ besteht aus genau einem Element i_N^p und es ist $i_N^{-p} = i_N^{p\#\#}$.

(4.1o) $\underline{K}_p(N,A)$ und $\underline{K}_p(A,N)$ haben je ein größtes und ein kleinstes Element W_{AN}^p, $w_{AN}^p \in \underline{K}_p(N,A)$, W_{NA}^p, $w_{NA}^p \in \underline{K}_p(A,N)$ mit

$W_{AN}^p = W_{AN} i_N^p = W_{NA}^{-p\#}$, $w_{AN}^p = w_{AN} i_N^p = w_{NA}^{-p\#}$ etc..

Beweis: (4.9): Für $f,g \in \underline{K}_p(N,N)$ ist $f^\# g = gf^\# = gg^\# = 1_N \in \underline{K}_o(N,N)$, daher g injektiv und $f^\# = g^\#$ oder f = g. Nach Voraussetzung ist $\underline{K}_p(N,N)$ nicht leer.

(4.1o): Für $f \in \underline{K}_p(N,A)$ ist $\underline{K}_o(N,A)\, f i_N^{p\#} < W_{AN}$ und $f = f1_N = f i_N^{p\#} i_N^p < W_{AN} i_N^p =: W_{AN}$. Die restlichen Behauptungen folgen analog. Sie bieten aber auch eine Möglichkeit, die verschiedenen Dualisierungen zu üben. $W_{AN}^p = W_{NA}^{-p\#}$ folgt, da $^\#$ ordnungsisomorph ist.

4.11. Damit definieren wir für $f \in \underline{K}_p(A,B)$:

---

[1]) W (w) ist Ω (ω) von |29|. Die Bezeichnung mit W (w) erfolgt aus technischen Gründen.

(4.12)	$If := fw_{AN}^{-p} \varepsilon \underline{K}_o(N,B)$ Indeterminiertheit von f	(4.15)	$K^{\#}f := (Kf)^{\#} = w_{NB}^{-p}f$
(4.13)	$I^{\#}f := (If)^{\#} = w_{NA}^{p} f^{\#}$	(4.14)	$Kf := f^{\#}w_{BN}^{p} \varepsilon \underline{K}_o(N,A)$ I-Kern von f
(4.16)	$Bf := fW_{AN}^{-p} \varepsilon \underline{K}_o(N,B)$ I-Bild von f	(4.19)	$D^{\#}f := (Df)^{\#} = W_{NB}^{-p}f$
(4.17)	$B^{\#}f := (Bf)^{\#} = W_{NA}^{p} f^{\#}$	(4.18)	$Df := f^{\#}W_{BN}^{p} \varepsilon \underline{K}_o(N,A)$ Definitionsbereich von f

Die Definitionen verstehen sich in der Reihenfolge der Numerierung. Wir benutzen später nur die geradzahlig numerierten.

Der Übergang

rechts <---> links ist K-dual,

1. Zeile <---> 3. Zeile
2. Zeile <---> 4. Zeile

} ist O-dual

1. Zeile <---> 2. Zeile
3. Zeile <---> 4. Zeile

} besteht im Anwenden von $^{\#}$.

Wir rechnen mit W, w ohne obere Indizes. Die Indizes sind so zu ergänzen, daß die Morphismen zwischen denen Gleichheit (=) oder Vergleichbarkeit (<) festgestellt wird, denselben Grad haben. Kommen W, w nur auf einer Seite vor, so ist der Grad durch die andere Seite festgelegt, ansonsten soll die Beziehung für alle p gelten. Durch Anwendung von ^{p} überzeugt man sich aber, daß es genügt eine solche Beziehung für ein p zu interpretieren. Die unteren Indizes der W, w lassen wir fort, wenn keine Unklarheiten auftreten können, ein Index muß immer N lauten. Diese Bemerkungen haben wieder keinen Beweischarakter, aber in unseren Anwendungen überzeugt man sich leicht von ihrer Richtigkeit. Etwas umständlicher konnte man <-Kongruenzen modulo $\underline{K}(N,N)$ einführen.

4.2o. AXIOM (K2):

(a) $If < Ig \Longrightarrow ff^{\#}g < g$,

(b) $Bf > Bg \Longrightarrow ff^{\#}g > g$ (> wie üblich):

(K2) gilt in $\underline{K}$, genau wenn es in $\bar{\underline{K}}$ und $\underline{K}*$ gilt.

Die umgekehrten Implikationen sind bereits Folge von (K1) (|29|), daher ist bei Voraussetzung von (K1,2):

$$\begin{aligned} &If < Ig \iff ff^{\#}g < g , \\ (\underline{4.21}) \quad &Bf > Bg \iff ff^{\#}g > g , \\ &Kf < Kg \iff gf^{\#}f < g , \\ &Df > Dg \iff gf^{\#}f > g . \end{aligned}$$

Die beiden ersten Zeilen sind Wiederholung von (K2) mit der anschließenden Bemerkung über <==. Die dritte Zeile ist K-dual zur ersten, die vierte K-dual zur zweiten. Genauer erhält man aus der ersten Zeile durch K-Dualisierung

(4.22) $\quad K^{\#}f < K^{\#}g \iff gf^{\#}f < g$.

Diese Aussage ist aber mit der dritten Zeile von (4.21) äquivalent. In diesem Sinne werden wir häufig die K-Dualisierung verwenden und so ist die Bemerkung in 4.11. zu verstehen, daß wir nur mit I, K, B, D rechnen werden.

Weiter folgert man aus (4.21) mit f = g:

(4.23) $\quad ff^{\#}f = f$ für alle $f \varepsilon \underline{K}$ und hieraus

(4.24) $\quad ff^{\#}w = fw$,
$\quad ff^{\#}W = fW$ (|29|1.16.) und aus (4.21)

(4.25) $\quad f < g$ und $If = Ig$ und $Df = Dg \implies f = g$ (|29|1.17.).

Schließlich besitzt jedes $\underline{K}_p(A,B)$ ein

(4.26) größtes Element $W^p_{BA} = W^r_{BN}W^s_{NA}$ $(r+s=p)$ und ein

(4.27) kleinstes Element $w^p_{BA} = w^r_{BN}w^s_{NA}$ $(r+s=p)$.

4.28. $\underline{K}$ genüge (K1,2). Ein $f \varepsilon \underline{K}$ heißt

(4.29) I-regulär :<==> $If = w$ [1] $\quad (\iff ff^{\#} < 1)$,
(4.30) B-regulär :<==> $Bf = W$ $\quad (\iff ff^{\#} > 1)$,
(4.31) K-regulär :<==> $Kf = w$ $\quad (\iff f^{\#}f < 1)$,
(4.32) D-regulär :<==> $Df = W$ $\quad (\iff f^{\#}f > 1)$.

Die Definition kann man auch ohne (K2) vornehmen. Die Klammer gilt bei (K2): Man setze g = 1 in (4.21).

Ein ID-regulärer Morphismus heißt ein eigentlicher Morphismus. Die eigentlichen Morphismen von $\underline{K}$ bilden eine graduierte geordnete Teilka-

---

[1]) Genau: $If = w_{BN}$ für $f : A \longrightarrow B$.

tegorie von $\underline{K}$ (mit der induzierten Graduierung), die wir mit $\underline{EK}$ bezeichnen. Der Begriff des eigentlichen Morphismus ist K-O-selbstdual, genauer ausgedrückt ist $\overline{\underline{EK}}^* = \underline{E}(\bar{\underline{K}}^*)$. Andererseits folgt aus (4.25), daß für eigentliche Morphismen aus $f < g$ bereits $f = g$ (f,g eigentlich) folgt. Man kann daher in Aussagen über $\underline{EK}$ stets "<" durch "=" ersetzen. "<" kommt dann nicht mehr vor. Daher ist $\overline{\underline{EK}} = \underline{EK}$, also $E(\bar{\underline{K}}^*) = (\underline{EK})^*$ oder: K-O-Dualisierung von $\underline{K}$ induziert auf $\underline{EK}$ die gewöhnliche Dualisierung als Kategorie.

(4.33) Ein I-Nullobjekt von $\underline{K}$ ist Nullobjekt von $\underline{EK}$. Die $w^r_{EN} W^s_{NA} =: O^p_{BA}$ (irgendeine Wahl von r+s=p) sind eigentliche Morphismen und bilden eine Familie von Nullmorphismen in $\underline{EK}$.

Ein eigentlicher Morphismus f heißt

(4.34) monomorph $:\Leftrightarrow Kf = w$,

(4.35) epimorph $:\Leftrightarrow Bf = W$,

(4.36) isomorph $:\Leftrightarrow Kf = w$ und $Bf = W$ ist.

Monomorphismen (Epimorphismen, Isomorphismen) sind injektiv (surjektiv, bijektiv) in $\underline{K}$ (|29|2.1.) [1]), jeder Isomorphismus ist eine Äquivalenz [2]) (4.29 - 4.32: $f^{\shortparallel}$ ist invers zu f).

Monomorphismen haben die Eigenschaft:

(4.37) Hat man $\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\ & & \uparrow g \\ & & \cdot \end{array}$ mit monomorphem f, eigentlichem g und $Bg < Bf$, so gibt es genau eine eigentliche Ergänzung zu einem kommutativen Diagramm $\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\ & \nwarrow^{h} & \uparrow g \\ & & \cdot \end{array}$. Dabei ist $h = f^{\shortparallel} g$. Von wesentlichem Interesse ist, daß $f^{\shortparallel} g$ eigentlich ist. Ähnlich definiert man Monomorphismen in allgemeinen Kategorien (|31|), wobei man einen Ersatz für $Bg<Bf$ braucht, falls nicht jeder Morphismus ein Bild hat. Monomorphismen haben gerade die von Teilen (Unterobjekten) erwarteten Eigenschaften und das motiviert ihre Einführung. In quasiexakten Kategorien ist monomorph (i.S.v.|31|) dasselbe wie injektiv (vgl.[1]) von p.6).

Epimorphismen sind K-O-dual zu Monomorphismen.

4.38. $\underline{K}$ sei weiter eine I-Kategorie mit (K1,2). Wir gehen aus von einem Diagramm

(4.39) $(N \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} N) =: (f,g)$ mit $f,g \in \underline{K}_o$

und definieren: Ein $h \in \underline{K}_o$ heißt Homologiemorphismus (Subquotientenmorphis-

---

[1]) Wir setzen jetzt immer (K1,2) voraus.

[2]) das sollte man von monomorph + epimorph erwarten (vgl. 4.37).

mus) von (f,g), wenn
(4.40) h IB-regulär und
(4.41) $Dh = g^{\#}$ und $Kh = f$ ist.

Wegen (4.41) ist $f < g^{\#}$ notwendig für die Existenz eines Homologiemorphismus von (f,g). Mit Axiom (K3) von 4.53. wird diese Bedingung auch hinreichend sein. (f,g) mit $f < g^{\#}$ heiße ein differentielles Paar, das Ziel H eines Homologiemorphismus h von (f,g) heiße ein Homologieobjekt von (f,g). Wegen (4.41) ist A die Quelle von h.

Zur Motivierung deuten wir den Zusammenhang mit der üblichen Bildung der Homologie von Moduln an: Bekanntlich definiert man für einen Homomorphismus $A \xrightarrow{d} A$ eines Moduls A mit $dd = 0$ die Homologie Hd := Kerd/Bild, wobei man benutzt, daß $dd = 0$ mit Bild⊂Kerd äquivalent ist. Die kanonische Projektion Kerd ⟶ Hd = Kerd/Bild ist als additive Korrespondenz (|29|) A ⟶ Hd unser h. Für die Bildung von h genügt es statt von $A \xrightarrow{d} A$ mit $dd = 0$ von Bild⊂Kerd A auszugehen. Natürlich kann man eine analoge Korrespondenz von A auf einen Subquotienten B/C in jeder Situation C⊂B⊂A bilden und diese Verallgemeinerung benötigen wir später zur einheitlichen Behandlung aller Terme der spektralen Folge einschließlich des E_∞-Terms, der nicht von einem Randoperator herstammt. C⊂B⊂A ist nicht selbstdual formuliert, sondern geht beim Dualisieren in A ⟶ B ⟶ C mit Quotienten B,C von A über. Offenbar ist C⊂B⊂A äquivalent zu $C \overset{i}{\subset} A \xrightarrow{p} A/B$ mit $pi = 0$ (entspricht $\text{Bild} \longrightarrow A \xrightarrow[0]{} \text{Cobd}$) und diese Situation ist in der allgemeineren Form $C \overset{i}{\subset} A \underset{0}{\xrightarrow{p}} B'$ mit einem Quotienten B' von A selbstdual. Nach Einführung von (K3) in 4.53. stellt sich heraus, daß die Teile (Quotienten) von A genau den Korrespondenzen N ⟶ A (A ⟶ N) entsprechen, so daß $C \overset{i}{\subset} A \underset{0}{\xrightarrow{p}} B'$ genau mit $N \xrightarrow{f:=Bi} A \xrightarrow{g:=K^{\#}p} N$ mit $f<g^{\#}$ äquivalent ist. Das ist unsere Ausgangssituation. Wir beschreiben den Zusammenhang genauer in 4.60..

4.42. Man definiert Exaktheit in $\underline{K}$ durch:
Ein Diagramm $\cdot \xrightarrow{k} \cdot \xrightarrow{l} \cdot$ heißt I-exakt, wenn $Kl = Bk$ ist. Längere Folgen heißen I-exakt, wenn sie an jeder Stelle I-exakt sind.
Die I-Exaktheit einer Folge ist K-O-selbstdual: $\cdot \xrightarrow{k} \cdot \xrightarrow{l} \cdot$ ist in $\underline{K}$ I-exakt, genau wenn $\cdot \xleftarrow{k} \cdot \xleftarrow{l} \cdot$ in $\underline{K}^*$ I-exakt ist. (entsprechend für längere Folgen).

Nach Einführung von Axiom (K3) werden wir feststellen, daß die Kategorie

$\underline{EK}$ der eigentlichen Morphismen von $\underline{K}$ quasiexakt ist und daß eine Folge von eigentlichen Morphismen in $\underline{EK}$ exakt ist (2.23.), genau wenn sie in $\underline{K}$ I-exakt ist.

4.43. $h \varepsilon \underline{K}_o$ ist ein Homologiemorphismus vo (f,g), genau wenn man ein I-exaktes Diagramm

(4.44) $N \xrightarrow{w} H \xrightarrow{h''} A \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} A \xrightarrow{h} H \xrightarrow{W} N$ hat.

Die Aussage über die Exaktheit in der Mitte ist ohne Bedeutung. Man könnte N streichen und fg zusammenfassen oder das Diagramm anders zusammensetzen zu

$$N \xrightarrow{f} A \xrightarrow{h} H \xrightarrow{W} N \xrightarrow{w} H \xrightarrow{h''} A \xrightarrow{g} N ,$$

wobei man N in der Mitte streichen und wW = O zusammenfassen kann. Wir halten uns an (4.44). Daß wir N in der Mitte beibehalten hat seinen Grund in (4.49).

4.45. Die Dualisierung des Homologiemorphismus nimmt man am einfachsten mit 4.43. vor: K-O-dual zu (4.44) ist die I-exakte Folge

(4.46) $N \xleftarrow{W} H \xleftarrow{h''} A \xleftarrow{g} N \xleftarrow{f} a \xleftarrow{h} H \xleftarrow{w} N$,

die die Aussage "h'' ist Homologiemorphismus von (g,f)" vertritt.

4.47. Für $N \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} N$ und $N \xrightarrow{f'} A' \xrightarrow{g'} N$ mit Homologiemorphismen $h:A \longrightarrow H$, $h':A' \longrightarrow H'$ definiert man für $k \varepsilon \underline{K}_o$ den "in der Homologie induzierten" Morphismus $h'kh'':H \longrightarrow H'$. K-O-Dualisierung ergibt abgesehen von Umbenennungen genau denselben Morphismus $h'kh'':H \longrightarrow H'$. Natürlich kann man dieselben Bildungen für $k \varepsilon \underline{K}$ vornehmen, wir sind aber nur an $k \varepsilon \underline{K}_o$ interessiert.

4.48. Mit $h'kh''$ und (4.44) bilden wir das Diagramm

(4.49)
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
N & \xrightarrow{w} & H & \xrightarrow{h''} & A & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{h} & H & \xrightarrow{W} & N \\
\downarrow 1 & & \downarrow h'kh'' & & \downarrow k & & \downarrow 1 & & \downarrow k & & \downarrow h'kh'' & & \downarrow 1 \\
N & \xrightarrow[w]{} & H' & \xrightarrow[h'']{} & A' & \xrightarrow[g']{} & N & \xrightarrow[f']{} & A' & \xrightarrow[h']{} & H' & \xrightarrow[W]{} & N
\end{array} .$$

Allgemein heiße für den Moment ein Diagramm $\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{a} & \cdot \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \cdot & \xrightarrow[d]{} & \cdot \end{array}$ <-kommutativ, wenn ba < dc ist [1]).

---

[1]) <-Kommutativität von allgemeinen ebenen Diagrammen kann man mit einer Orientierung der Ebene definieren. Bei O-Dualisierung (K-...) geht <-Kommutativität in >-Kommutativität über bei Orientierungserhaltung, bzw. bleibt erhalten bei Orientierungsumkehrung.

SATZ: Sind in (4.49) die beiden Mittelquadrate <-kommutativ (i.e. $g<g'k$, $kf<f'$), so sind auch die restlichen Quadrate <-kommutativ.

COROLLAR 1: $g < g'k$ und $kf < f'$ ==> $h'kh''$ ist eigentlich.

Beweis: $D''(h'kh'') = Wh'kh'' > W$ (rechts außen) und K-O-dual $I(h'kh'') = h'kh''w < w$ (links außen).

COROLLAR 2: Ist $kf < f'$, $g < g'k$, $k''f' < f$, $gk'' < g'$, so ist $h'kh''$ ein Isomorphismus, also eine Äquivalenz.

Mit $f = f'$, $g = g'$, $k = 1_A$ folgt, daß das Homologieobjekt eines Paares (f,g) bis auf Äquivalenz eindeutig ist.

Beweis des Satzes: (1) links und rechts außen (|29|3.8.):
$h'kh''w = h'kf < h'f' = h'h''w = h'w = w$,
$Wh'kh'' = g'kh'' > gh'' = Whh'' = Wh'' = W$.

(2) $h'kh''h < h'k$ (halb rechts außen) erhält man mit (4.21) aus $Kh<K(h'k)$, diese Ungleichung folgt aus $Kh = f$, $K(h'k) = k''h''w = k''Kh' = k''f'$ und $f < k''f'$. Die letzte Ungleichung wieder erhält man aus $f < k''kf < k''f'$. Dabei ist $k''kf < k''f'$ Folge der <-Kommutativität des rechten mittleren Quadrates und $f < k''kf$ ist Folge der <-Kommutativität des linken mittleren Quadrates mit (4.21) und $Bf = f < g'' < k''g'' < k''W = Bk''$.
Die Behauptung $kh'' < h''h'kh''$ ist mit Umbenennung K-O-dual zu dem eben Bewiesenen.
Die beiden unter (2) bewiesenen Behauptungen scheinen zunächst nicht sehr sinnvoll. Wir werden aber später von ihnen Gebrauch zu machen haben.

4.5o. Anwendung: Sei $d \varepsilon \underline{K}$. $h \varepsilon \underline{K}_o$ heißt ein Homologiemorphismus von d (|29|3.6.), wenn
(1) h IB-regulär und
(2) $Dh = Kd$ und $Kh = Bd$ ist.
Ein Homologiemorphismus von d ist also dasselbe wie ein Homologiemorphismus von $N \xrightarrow{Bd} . \xrightarrow{K''d} N$. Wie oben bemerkt ist $Bd<Kd$ notwendig und nach (K3) auch hinreichend für die Existenz von h. Aus der Bedingung folgt, daß Quelle und Ziel von d übereinstimmen. $Bd<Kd$ ist eine Verallgemeinerung der in abelschen Kategorien bekannten Bedingung $dd = 0$. Der Zusammenhang ist nach Einführung von (K3): $dd = 0$ <==> $Bd<Kd$ und d eigentlich. d mit $Bd<Kd$ heiße ein Randoperator (in $\underline{K}$).
h ist genau dann ein Homologiemorphismus von d, wenn man eine I-exakte Folge

(4.51) $N \xrightarrow{w} H \xrightarrow{h''} A \xrightarrow{d} A \xrightarrow{h} H \xrightarrow{W} N$ hat (|29|3.7.).

Manchmal ist es geschickter, die Folge

$$A \xrightarrow{d} A \xrightarrow{h} H \xrightarrow{W} N \xrightarrow{w} H \xrightarrow{h''} A \xrightarrow{d} AA$$

zu betrachten. Das ist dann der Fall, wenn man d in einer Kategorie $\underline{K} = \underline{K}'^{\mathbb{Z}}$ als Folge (Kettenkomplex)

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

schreibt. Das Diagramm zerfällt dann in eine Folge von Diagrammen

$$A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{h_n} H_n \xrightarrow{W} N \xrightarrow{w} H_n \xrightarrow{h''_n} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} .$$

Ist $d':A' \longrightarrow A'$ ein zweiter Randoperator mit Homologiemorphismus $h':A' \longrightarrow H'$ und $k:A \longrightarrow A'$ in $\underline{K}_o$, so hat man den in der Homologie induzierten Morphismus $h'kh''$ (4.47). Die Bedingungen von 4.48.Satz sind jetzt $kBd<Bd'$ und $Kd<k''Kd'$ ($<==>$ $K''d<(K''d')k$). Aus abelschen Kategorien ist bekannt, daß $kd = d'k$ sichert, daß in der Homologie ein (eigentlicher) Morphismus induziert wird. Diese Bedingung ist uns zu stark, wir weisen jedoch auf die Abschwächung $kd<d'k$ hin. $k\varepsilon\underline{K}_o$ heiße ein Kettenmorphismus $k:d \longrightarrow d'$, wenn $kd<d'k$ ist [1]). Es ist dann $kBd = kdW < d'kW <d'W = Bd'$ und $Kd = d''w < d''k''w < k''d''w = k''Kd'$. Aus (4.49) folgt also:

SATZ: Ist in dem Diagramm mit I-exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
N & \xrightarrow{w} & H & \xrightarrow{h''} & A & \xrightarrow{d} & A & \xrightarrow{h} & H & \xrightarrow{W} & N \\
{\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'kh''} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle h'kh''} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\
N & \xrightarrow[w]{} & H' & \xrightarrow[h''']{} & A' & \xrightarrow[d']{} & A' & \xrightarrow[h']{} & H' & \xrightarrow[W]{} & N
\end{array}$$

das Mittelquadrat <-kommutativ, so sind auch die restlichen Quadrate <-kommutativ.

Natürlich ergeben sich die in den Corollaren 1, 2 in 4.48. beschriebenen Konsequenzen.

Zur Dualisierung bemerkt man, daß d ein Randoperator in $\underline{K}$ ist, genau wenn d Randoperator in $\bar{\underline{K}}^*$ ist. Ebenso ist f Kettenmorphismus in $\underline{K}$, genau wenn in $\bar{\underline{K}}^*$. h ist wieder Homologiemorphismus von d in $\underline{K}$, genau wenn h'' Homologiemorphismus von d in $\bar{\underline{K}}^*$ ist.

4.53. AXIOM (K3): Zu jedem $u\varepsilon\underline{K}_o(N,A)$ - $A\varepsilon|\underline{K}|$ beliebig - gibt es

(Mon) einen Monomorphismus $\cdot \xrightarrow{m} A$ mit $|m|=o$ und $Bm=u$,

(Epi) einen Epimorphismus $A \xrightarrow{e} \cdot$ mit $|e|=o$ und $Ke=u$.

Da (Epi) äquivalent zu der zu (Mon) O-dualen Aussage ist, gilt (K3) in $\bar{\underline{K}}$, genau wenn es in $\underline{K}$ gilt. Nach 4.7. gilt (K3) dann auch in $\underline{K}^*$ und in $\bar{\underline{K}}^*$.

---

[1]) genauer müßte man Kettenmorphismen als Tripel (d,d',k) definieren.

Für den Rest von 4. setzen wir (K1-3) voraus.

4.54. SATZ: Zu jedem differentiellen Paar $N \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} N$ existiert ein Homologiemorphismus.

Beweis (|29|4.4.): Man wähle einen Monomorphismus $m:Z \longrightarrow A$ mit $Bm=g''$, $|m|=o$, dann einen Epimorphismus $e:Z \longrightarrow H$ mit $Ke = m''f$, $|e|=o$. $h := em''$ ist Homologiemorphismus von (f,g), denn
(1) ist mit m'' und e auch $h=em''$ IB-regulär und
(2) ist $Dh = me''W = mW = Bm = g''$ und $Kh = me''w = mm''f = f$ ((4.21), da $Im = w < If$ und $Bm = g'' > f = Bf$).

Ausgehend von demselben Diagramm $N \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} N$ würde die K-O-duale Konstruktion bis auf durch Auswahl bedingte Äquivalenz gerade $h'':H \longrightarrow A$ liefern. Dabei erhält man eine Zerlegung $h'' = e''m'$ mit monomorphem m' und epimorphem e'. Man vergleiche für eine Interpretation (in einer abelschen Kategorie) 4.6o..

4.55. DK sei die Kategorie mit:

(D1) Objekte von DK sind die differentiellen Parre $N \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} N$,
(D2) Ein Morphismus $k:(f,g) \longrightarrow (f',g')$ ist ein Morphismus $k \in K_o(A,A')$ mit $kf<f'$ und $g<g'k$,
(D3) die Komposition ist die von K.

Natürlich müßte man genauer Morphismen als Tripel $((f,g),(f',g'),k)$ mit $k:A \longrightarrow A'$ einführen wie üblich, damit Quelle und Ziel der Morphismen wohlbestimmt sind.
Außerdem lassen sich die Betrachtungen genauso durchführen, wenn man sich nicht auf $k \in K_o$ beschränkt. In den Diagrammen wie z.B. (4.49) hat man dann die senkrechten $1:N \longrightarrow N$ durch ein entsprechendes i^p_N zu ersetzen.

Zu jedem $(f,g) \in |DK|$ wählt man einen Homologiemorphismus $h(f,g):A \longrightarrow H(f,g)$ und definiert $Hk := (h(f',g'))k(h(f,g))'':H(f,g) \longrightarrow H(f',g')$ für $k:(f,g) \longrightarrow (f',g')$.

SATZ 1 : H ist ein kovarianter Funktor DK $\longrightarrow$ EK .
(läßt man für k Morphismen beliebigen Grades zu, so ist (H,1) ein kovarianter Funktor von graduierten Kategorien).

Beweis: Wegen 4.48. kann EK als Zielkategorie von H gewählt werden. Es ist $H1_{(f,g)} = (h(f,g))(h(f,g))'' = 1_{H(f,g)}$ nach (4.29,4.3o), da h IB-regulär ist. $H(lk) = (Hl)(Hk)$ folgt aus $(Hl)(Hk) = h''lh''h'kh'' > > h''lkh''$(4.48.Satz) $= H(lk)$. Dabei kann = für > gesetzt werden, da auf

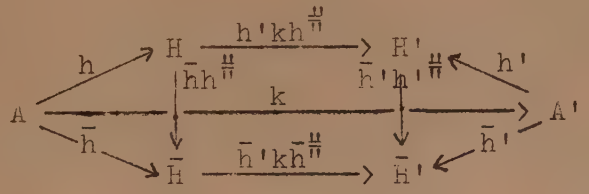
beiden Seiten eigentliche Morphismen stehen.

SATZ 2 : Jede andere Auswahl von Homologiemorphismen für die (f,g) liefert einen zu H äquivalenten Funktor.

Beweis: $\bar{h}(f,g):A \longrightarrow \bar{H}(f,g)$ sei eine zweite Auswahl. Die $(\bar{h}(f,g)(h(f,g))^{\shortparallel}$ definieren eine natürliche Transformation $H \longrightarrow \bar{H}$, da (Diagramm 5.56!) $\bar{h}'kh^{\shortparallel}{}^{\shortparallel}hh^{\shortparallel} < \bar{h}'kh^{\shortparallel} < \bar{h}'h'^{\shortparallel}h'kh^{\shortparallel}$ (4.48.) und beide Seiten eigentlich sind. Nach der sich an 4.48.Corollar 2 anschließenden Bemerkung sind die $\bar{h}h^{\shortparallel}$ Äquivalenzen.

K-O-Dualisierung ergibt (bis auf Äquivalenz) denselben Funktor H. Die Varianz von H ändert sich nicht, da sowohl DK als auch EK zu dualisieren sind.

(4.56)



Entsprechend ist H ein Funktor von der Kategorie der Randoperatoren und Kettenmorphismen in EK und jede andere Auswahl liefert einen äquivalenten Funktor.

4.57. Ist K eine graduierte I-Kategorie mit (K1 - 3), so ist EK (graduiert) quasiexakt. Eine Folge von eigentlichen Morphismen ist exakt in EK (2.23.), genau wenn sie in K I-exakt ist (|29|4.8.).

Für "I-exakt" sagen wir daher in Zukunft einfach "exakt".

LEMMA: Ein eigentlicher Morphismus ist injektiv (surjektiv, bijektiv) in EK, genau wenn er monomorph (epimorph, isomorph) ist.

Beweis: "wenn": |29|2.2.; "genau (wenn)": |29|4.9.(dies folgt nicht aus der Bemerkung vor 4.38. (monomorph = injektiv in quasiexakten Kategorien), da in |31| monomorph etwas anders definiert wurde).

4.58. In EK ist für jedes A die t-geordnete Menge TeiA definiert (2.16). Für $m \varepsilon TeiA$ ist $Bm \varepsilon K_0(N,A)$. $K_0(N,A)$ ist t-geordnet mit der Ordnung von 4.1.. Die Ordnungen haben scheinbar nichts miteinander zu tun. Man beweist jedoch:

SATZ: B:TeiA $\longrightarrow K_0(N,A)$ ist eine ordnungshomomorphe (= kovariante) Äquivalenz von t-geordneten Mengen.

Beweis: |29|4.12.. Die inverse Abbildung zu B erhält man mit (K3).

K-O-Dualisierung ergibt eine ordnungsumkehrende (= kontravariante) Äquivalenz K:QuoA ⟶ $\underline{K}_o(N,A)$. Genauer erhält man $K^{\sharp\sharp}$:QuoA ⟶ $\underline{K}_o(A,N)$ an das man noch $^{\sharp\sharp}$ anschließt. K-O-Dualisierung bewirkt auf $\underline{EK}$ die gewöhnliche Dualisierung, so daß $<_l$ von TeiA in $<_r$ von QuoA übergeht. In $\underline{K}_o(N,A)$ ist jedoch die Ordnung umzukehren (Das erklärt sich auch mit 2.22.).

4.59. Die Bildungen ker, cok, bil, cob für eigentliche Morphismen A ⟶ C erhält man als kommutative Ergänzungen in

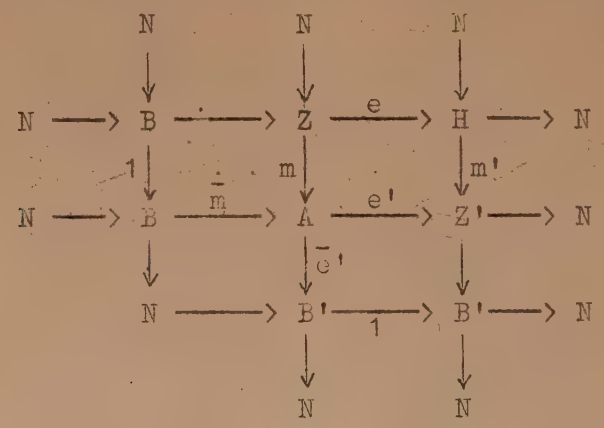
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TeiA} & \xrightarrow{B} & \underline{K}_o(N,A) \\ & \overset{\mathrm{ker}}{\nwarrow} & \big\downarrow K \\ & & \underline{EK}(A,C) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{QuoC} & \xrightarrow{K} & \underline{K}_o(N,C) \\ & \overset{\mathrm{cok}}{\nwarrow} & \big\downarrow B \\ & & \underline{EK}(A,C) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TeiC} & \longrightarrow & \underline{K}_o(N,C) \\ & \overset{\mathrm{bil}}{\nwarrow} & \big\downarrow B \\ & & \underline{EK}(A,C) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{QuoA} & \longrightarrow & \underline{K}_o(N,A) \\ & \overset{\mathrm{cob}}{\nwarrow} & \big\downarrow K \\ & & \underline{EK}(A,C) \end{array} .$$

$\bar{f}$ in der Analyse eines eigentlichen f:A ⟶ C ist $\bar{f} = (\mathrm{bil}f)^{\sharp\sharp} f (\mathrm{cob}f)^{\sharp\sharp}$ nach [29] 4.5.,4.11..

4.60. Wir können jetzt den in 4.38. angedeuteten Zusammenhang mit der gewöhnlichen Homologie in einer quasiexakten Kategorie genauer beschreiben. $\underline{A}$ sei eine quasiexakte oder abelsche (graduierte) Kategorie. Für einen Morphismus d:A ⟶ A in $\underline{A}$ heißt H bekanntlich ein Homologieobjekt, wenn sich H in ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

(4.61)



mit m = kerd und $\bar{m}$ = bild einbetten läßt (Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß alle Morphismen in (4.61) den Grad o haben). Diese Definition der Homologie ist selbstdual. Notwendig für die Existenz von (4.61) ist offenbar bild=$\bar{m}$ $<_l$ m=kerd. Das ist die bekannte mit dd=0 äquivalente

Bedingung. Die Bedingung ist auch hinreichend: Man baut (4.61) von der Zelle

(4.62)
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & Z \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ B & \xrightarrow{\bar{m}} & A \end{array}$$
her auf, indem man e:=cok(B ⟶ Z), e':=cok$\bar{m}$ setzt, m' und (Z' ⟶ B') mit 2.22. ergänzt und aus dem 3X3-Lemma (|25|xii.3.4.) folgert, daß die letzte Spalte exakt ist.

Dual können wir (4.61) von der Zelle

(4.63)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e'} & Z' \\ {\scriptstyle \bar{e}'}\downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow[1]{} & B' \end{array}$$
mit $\bar{e}'$=cobd und e'=cokd her aufbauen.

Da die in (4.62) oder (4.63) enthaltene Information genau in

(4.64)
$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\bar{m}} & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{e}'} \\ N & \longrightarrow & B' \end{array}$$
mit $\bar{m}$=bild und $\bar{e}'$=cobd enthalten ist, kann man auch mit (4.64) beginnen. (4.64) aber ist bis auf Bezeichnung selbstdual und bei $\underline{A} = \underline{EK}$ entspricht es genau dem differentiellen Paar $N \xrightarrow{B\bar{m}} A \xrightarrow{K''\bar{e}'} N$ mit $B\bar{m} < (K''\bar{e}')'' = K\bar{e}'$.

Ist $\bar{m}$=bild und $\bar{e}'$=cobd für einen eigentlichen Morphismus mit dd=0, so überzeugt man sich, daß $B\bar{m} = Bd$ und $K''\bar{e}' = K''d$ ist und daß die in 4.54. beschriebene Konstruktion von h gerade $h = em'' = m'''e'$ liefert in der Bezeichnung e, m, m', e' von (4.61) (d.h. wir haben die Bezeichnungen in (4.61) so gewählt, daß sie mit 4.54. übereinstimmen).

Wir gehen zurück in $\underline{A}$. Sei $\hat{d}$ ein zweiter Morphismus mit $\hat{d}\hat{d} = 0$ und sei $k \in \underline{A}_0$ so, daß $kd = \hat{d}k$ ist. Dann existiert bekanntlich genau ein kommutatives Diagramm

(4.65)
$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{m} & Z & \xrightarrow{e} & H \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k_*} \\ \hat{A} & \xleftarrow{\hat{m}} & \hat{Z} & \xrightarrow{\hat{e}} & \hat{H} \end{array}$$
in $\underline{A}$ (mit den offensichtlichen Bezeichnungen). k_* ist nach Definition der übliche in der Homologie induzierte Morphismus.

Man zeigt, wenn wieder $\underline{A} = \underline{EK}$ ist, daß

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{m} & Z & \xrightarrow{\quad e \quad} & H \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Zk:=\hat{m}''km} & & \downarrow{\scriptstyle Hk} \\ \hat{A} & \xleftarrow{\hat{m}} & \hat{Z} & \xrightarrow{\quad \hat{e} \quad} & \hat{H} \end{array}$$
kommutativ ist mit eigentlichem Zk (und Hk!). Daraus folgt $Hk = k_*$.

Beweis: (1) Zk ist eigentlich: (a) $IZk = \hat{m}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}kmw = \hat{m}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}I(km) = \hat{m}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}w$ (km eigentlich) $= K\hat{m} = w$ ($\hat{m}$ monomorph). (b) $DZk = (\hat{m}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}km)\overset{\shortparallel}{\shortparallel}W = m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}k\overset{\shortparallel}{\shortparallel}\hat{m}W \triangleq m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}k\overset{\shortparallel}{\shortparallel}B\hat{m} = m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}k\overset{\shortparallel}{\shortparallel}K\hat{d}$ ($B\hat{m}=K\hat{d}$) $= m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}k\overset{\shortparallel}{\shortparallel}\hat{d}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}w = m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}d\overset{\shortparallel}{\shortparallel}k\overset{\shortparallel}{\shortparallel}w$ ($\hat{d}k=kd$) $> m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}d\overset{\shortparallel}{\shortparallel}w = m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}Kd = m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}Bm$ ($Kd=Bm$) $= m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}mW = m\overset{\shortparallel}{\shortparallel}W$ (4.24) $= Dm = W$ (m eigentlich). (c) Kommutativität links: $\hat{m}Zk = \hat{m}\hat{m}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}km < km$ (4.29); da beide Seiten eigentlich sind besteht Gleichheit. (2) Kommutativität rechts: $(Hk)e = \hat{h}kh\overset{\shortparallel}{\shortparallel}e = \hat{e}\hat{m}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}kme\overset{\shortparallel}{\shortparallel}e > \hat{e}\hat{m}\overset{\shortparallel}{\shortparallel}km$ (4.32) $= \hat{e}Zk$; wieder besteht Gleichheit, da beide Seiten eigentlich sind.

4.66. Wir geben die restlichen Axiome von |29| an:

AXIOM (K4): Für jedes p,A,B ist $\underline{K}_p(A,B)$ ein Verband.

Für die spektralen Folgen benötigen wir die Verschärfung:

AXIOM (K4'): Für jedes p, A, B ist $\underline{K}_p(A,B)$ ein abzählbar vollständiger Verband [1]).

4.67. Aus der Monotonie der Komposition in $\underline{K}$ ergibt sich

$$(g_1 \cap g_2)f < g_1 f \cap g_2 f \qquad (|29|5.3.)$$

und die K-,O- und K-O-dualen Formeln, die wir nicht extra angeben. Die Gültigkeit bleibt auch für abzählbare Durchschnitte erhalten: Es gilt also

$$(\bigcap_j g_j)f < \bigcap_j (g_j f)$$

für jede abzählbare Indexmenge $J \ni j$, wenn die Ausdrücke definiert sind, also sicher, wenn wir (K4') voraussetzen. Bei einer geeigneten Existenzvoraussetzung, kann J überhaupt beliebig sein.
Ebenso gelten die K-, O- und K-O-dualen Formeln.

4.68. Dann zitieren wir von |29|5.4.:

$$\text{If} < Kg_j \ (j = 1, 2) \Longrightarrow (g_1 \cap g_2)f > g_1 f \cap g_2 f \ .$$

Auch hier gelten die sämtlichen dualen Formeln.
Der Beweis von |29|5.4. gilt offenbar genauso für abzählbare (oder bei Existenz auch beliebigen) Durchschnitt. Wir haben also:

$$\text{If} < Kg_j \ (j = 1, 2, \ldots) \Longrightarrow (\bigcap_j g_j)f > \bigcap_j (g_j f)$$

und die sämtlichen dualen Formeln.

4.69. AXIOM (K5): $\text{If} < Kg_1 \Longrightarrow g_1 f \cap g_2 f < (g_1 \cap g_2)f$

$$Dg_1 < Bf \Longrightarrow (g_1 \cap g_2)f < g_1 f \cap g_2 f \ .$$

---

[1]) Oft also $\sigma\delta$-Verband bezeichnet: d.h. für abzählbare Familien existieren Vereinigung und Durchschnitt.

AXIOM (K6): Zu $A_1, A_2 \varepsilon |\underline{K}|$ und $r,s \varepsilon G$ ($\underline{K}$ sei G-graduiert) gibt es

(Prod) $P \varepsilon |\underline{K}|$ und $g_1 \varepsilon \underline{EK}_r(P,A_1)$, $g_2 \varepsilon \underline{EK}_s(P,A_2)$ mit $g_2 g_1^{\amalg} = w_{A_2 A_1}$,

(Sum) $S \varepsilon |\underline{K}|$ und $h_1 \varepsilon \underline{EK}_r(A_1,S)$, $h_2 \varepsilon \underline{EK}_s(A_2,S)$ mit $h_2^{\amalg} h_1 = w_{A_2 A_1}$.

Die Axiome gelten in $\underline{K}^*$ und $\bar{\underline{K}}$, wenn sie in $\underline{K}$ gelten.

Mit den für die Graduierung notwendigen Ergänzungen beweist man wie in |29|:

(4.7o)SATZ: $\underline{K}$ und $\underline{K}'$ seien graduierte I-Kategorien mit (K1 - 3). Jeder I-Nullobjekttreue I-Funktor $\Phi: \underline{K} \longrightarrow \underline{K}'$ definiert durch Einschränkung einen exakten Funktor $\phi: \underline{EK} \longrightarrow \underline{E}(\underline{K}')$.
Zu jedem exakten Funktor $\phi: \underline{EK} \longrightarrow \underline{E}(\underline{K}')$ existiert genau eine Erweiterung $\Phi: \underline{K} \longrightarrow \underline{K}$, die ein I-Nullobjekttreuer I-Funktor ist.

(4.71)SATZ: Erfüllt $\underline{K}$ (K1 - 6), so ist $\underline{EK}$ abelsch. Die Definition der Addition in $\underline{EK}$ ist nur auf eine Weise möglich.

(4.72)SATZ: Ist $\underline{A}$ eine graduierte abelsche Kategorie mit Einhängung, so gibt es eine graduierte I-Kategorie $\underline{K}$, die (K1 - 6) erfüllt, so daß $\underline{A}$ kovariant (exakt) äquivalent zu $\underline{EK}$ ist.

Aus (4.7o) erhält man die Eindeutigkeit bis auf Äquivalenz von $\underline{K}$.

Zur Konstruktion von $\underline{K}$ zieht man die direkten Summen von 3.8. heran:
Ein Morphismus $A \longrightarrow B$ von $\underline{K}$ vom Grade q ist ein Element von $Tei C$, wo

$A \underset{p_A}{\overset{i_A}{\rightleftarrows}} C \underset{p_B}{\overset{i_B}{\rightleftarrows}} B$ ein direktes Summendiagramm mit $|i_A| = o$, $|i_B| = -q$ ist (das entspricht der Definition der Morphismen in einer Kategorie $\underline{C}^{\mathbb{Z}}$: ein Morphismus vom Grade q ist eine Familie von Morphismen $A_p \longrightarrow B_{p+q}$).
Dann verfährt man genauso wie |29|2.7..

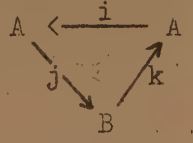
Damit sind wir legitimiert, Aussagen über eine graduierte abelsche Kategorie mit Hilfe des zugehörigen $\underline{K}$ zu beweisen. Dabei ergeben sich häufig wesentliche Vereinfachungen. Wir nehmen dann o.B.d.A. jeweils an, daß $\underline{A} = \underline{EK}$ ist.

Andererseits gilt eine Aussage, die in jedem $\underline{EK}$ gilt, für jede graduierte abelsche Kategorie.

5. SPEKTRALE FOLGEN

K sei eine graduierte I-Kategorie mit (K1 - 6) und (K4'). EK =: A ist graduiert abelsch.

5.1. Ein exaktes Paar in K ist ein exaktes Diagramm

(5.2)  =: (i;j,k) mit j,k∈A. Wir definieren für

$1 \leq r \in \mathbb{Z}$ Randoperatoren $d_r(i;j,k) =: d_r : B \longrightarrow B$ durch

(5.3) $d_r := ji^{\amalg r-1}k$ [1])

und rechnen aus

(5.4) $Bd_r = ji^{\amalg r-1}kW < jW = k^{\amalg}w$ (Exaktheit) $< k^{\amalg}i^{s-1}j^{\amalg}w = Kd_s$

für beliebige $r,s \geq 1$. Damit haben wir eine Folge von Diagrammen

(5.5) $N \xrightarrow{Bd_r} B \xrightarrow{K^{\amalg}d_r} N$, $1 \leq r \in \mathbb{Z}$, mit $Bd_r < Kd_r$.

(5.6) $h_r : B \longrightarrow B^r$ [2]) sei Homologiemorphismus (4.38., Existenz: 4.54.) von $(Bd_r, K^{\amalg}d_r)$ oder - das ist dasselbe - von d_r.

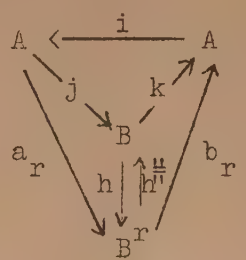
Außerdem haben wir

(5.7) $N \xrightarrow{\bigcup Bd_r} B \xrightarrow{\bigcap K^{\amalg}d_r} N$ mit $Bd_r < \bigcap Kd_r = (\bigcap K^{\amalg}d_r)^{\amalg}$,

wo die Existenz des Diagramms aus (K4') und die Ungleichung aus (5.4) folgt.

(5.8) $h_\infty : B \longrightarrow B^\infty$ sei Homologiemorphismus von (5.7).

5.9. Für $1 \leq r \leq \infty$ betrachten wir das Diagramm

(5.10)  mit $a_r := h_r j$, $b_r := kh_r^{\amalg}$

---

[1]) $i^{\amalg r-1} = i^{\amalg} \ldots . i^{\amalg}$ (Potenz); $i^{\amalg 0} := 1_A$, allgemein $f^0 := 1_C$ für $f \in \underline{K}(C,C)$.

[2]) Wir indizieren oben, da wir später auch untere Indizes an den B^r brauchen. Die Morphismen indizieren wir trotzdem unten, um die Indizes nicht mit Potenzen zu verwechseln.

und behaupten:

5.11. SATZ: (1) a_r und b_r sind eigentliche Morphismen,

(2) $A \xrightarrow{a_r} B^r \xrightarrow{b_r} A$ ist exakt,

(3) $Bb_r = Ki_\wedge Bi^r$, $Ka_r = Bi_\vee Ki^r$ für $1 \leq r < \infty$,

(4) $Bb_\infty = Ki_\wedge \bigcap_r Bi^r$, $Ka_\infty = Bi_\vee \bigcup_r Ki^r$.

5.12. COROLLAR: Ist $i \in \underline{A}$ (eigentlich), so ist

(1) $bilb_r = keri_\wedge bili^r$, $coba_r = coki_\wedge cobi^r$ für $1 \leq r < \infty$,

(2) $bilb_\infty = keri_\wedge \bigcap_r bili^r$, $coba_\infty = coki_\wedge \bigcap_r cobi^r$.

Das Corollar ergibt sich aus 5.11. durch Anwendung von 4.59. und ist mit den Abkürzungen

(5.13) $\bigcap_r Bili^r =: Bili^\infty$, $\bigcap_r Cobi^r := Cobi^\infty$

(für Moduln) als Exaktheit der Folgen

(5.14) $N \longrightarrow Coki_\wedge Cobi^r \longrightarrow B^r \longrightarrow Keri_\wedge Bili^r \longrightarrow N$, $1 \leq r \leq \infty$

bekannt (|17|, |22|).

Wegen der Exaktheit von (5.2) gelten Satz und Corollar auch für r=o, wenn man $h_o := 1_B$ setzt (das entspricht $d_o := 0 : B \longrightarrow B$).

5.15. Beim Beweis von 5.11. benutzen wir K-O-Dualisierung. Wir stellen daher über die in 5.1. - 5.1o. enthaltenen Definitionen und Voraussetzungen [1]) fest, daß sie bei K-O-Dualisierung und den Umbenennungen

(5.16) $j \langle\!-\!-\!\rangle k$, $h \langle\!-\!-\!\rangle h^{\shortparallel\shortparallel}$, $a \langle\!-\!-\!\rangle b$

in sich übergehen. Für das folgende Lemma sei darauf higewiesen, daß sich hierbei speziell d_r reproduziert.

5.17. Zur einheitlichen Behandlung von (5.6) $r<\infty$ und (5.8) $r=\infty$ dient das

(5.18) LEMMA (|29| 3.15.):

$$Dd_r = k^{\shortparallel\shortparallel} i^{r-1} j^{\shortparallel\shortparallel} W = k^{\shortparallel\shortparallel} i^{r-1} W = \begin{cases} k^{\shortparallel\shortparallel} W = W, & r=1 \\ k^{\shortparallel\shortparallel} i^{r-2} iW = k^{\shortparallel\shortparallel} i^{r-2} j^{\shortparallel\shortparallel} w = Kd_{r-1}, & 1<r<\infty \end{cases}$$

und mit Umbenennung (5.16) K-O-dual

$$Id_r = \begin{cases} w, & r=1 \\ Bd_{r-1}, & 1<r<\infty . \end{cases}$$

Aus dem Lemma folgt

(5.19) $Dd_1 > Kd_1 = Dd_2 > Kd_2 = \ldots > Kd_{r-1} = Dd_r > Kd_r = > \ldots$ und

(5.2o) $Id_1 < Bd_1 = Id_2 < Bd_2 = \ldots < Bd_{r-1} = Id_r < Bd_r = < \ldots$

---

[1]) insbesondere: (5.2, 5.3, 5.6, 5.8) und die Definition von a_r, b_r.

und wegen der Monotonie der Kd_r, Bd_r

(5.21) $Bd_r = \overset{r}{\cup} Bd_n$, $\overset{r}{\cup} Kd_r = Kd_n$ (Vereinigung bis r etc.).

wir können daher die Definition von h_r für endliche r (5.6) und $r=\infty$ (5.8) zusammenfassen zu

(5.22) $h_r : B \longrightarrow B^r$, $1 \leq r \leq \infty$, sei Homologiemorphismus von $N \xrightarrow{\overset{r}{\cup} Bd_n} B \xrightarrow{\overset{r}{\cap} K^{\pi} d_n} N$.

Wir ziehen aus dem Lemma später noch weitere Folgerungen (5.27).

5.23. Beweis von 5.11.:(Schritte, die aus der direkten Anwendung der Exaktheit von (5.2) folgen, begründen wir nicht)

(1) b_r ist D-regulär: $Db = (kh^{\pi})^{\pi} W = hk^{\pi} W = hW$ (k D-regulär(eigentlich))= $= W$(h B-regulär (Homologiemorphismus)). b_r ist I-regulär: $Ib = kh^{\pi} w = k \overset{r}{\cup} ji^{\pi n-1} kW$ (5.22) $< k \overset{r}{\cup} jW = kjW = kk^{\pi} w = kw$ (4.25) $= w$ (k I-regulär (eigentlich)). Also ist b_r eigentlich. Aus 5.15. folgt, daß a_r eigentlich ist.

(2) $Kb = K(kh^{\pi}) = (kh^{\pi})^{\pi} w = hk^{\pi} w = hjW = B(hj) = Ba$.

(3,4) $Bb = B(kh^{\pi}) = kh^{\pi} W = k \overset{r}{\cap} k^{\pi} i^{n-1} j^{\pi} w$ (5.22) $= k \overset{r}{\cap} k^{\pi} i^n W =$ $kk^{\pi} \overset{r}{\cap} i^n W$ (>:4.67.;<:4.68. wegen $Ih=w$) $= kk^{\pi} kW \wedge kk^{\pi} \overset{r}{\cap} i^n W$ (da $kk^{\pi} \overset{r}{\cap} i^n W <$ $kW = kk^{\pi} kW$ (4.23)) $= kk^{\pi}(kW \wedge \overset{r}{\cap} i^n W)$ (>:4.67;<:4.68. wegen $K(kk^{\pi}) = kk^{\pi} w =$ $= kw$ (4.24) $= w$ (k I-regulär)) $= kW \wedge \overset{r}{\cap} i^n W$ ((4.21) wegen $Ik=w$, $Bk >$ $> B(kW \wedge \overset{r}{\cap} i^n W) = Bk \wedge \overset{r}{\cap} i^n W) = i^{\pi} w \wedge \overset{r}{\cap} i^n W = Ki \wedge \overset{r}{\cap} Bi^n$. Für endliches r ist $\overset{r}{\cap} Bi^n = Bi^r$ wegen $i^r W < i^{r-1} W < \ldots < iW < W$. Die Behauptungen über Ka folgen durch K-O-Dualisierung mit 5.15..

5.24. Eine Familie $SF = (B \xrightarrow{d_r} B \mid 1 \leq r \varepsilon \mathbb{Z})$ von Morphismen von $\underline{K}$ mit

(5.25) $Bd_r < Kd_r$ (Randoperatoren!), eigentlichem d_1 und

(5.26) $Id_r = Bd_{r-1}$, $Dd_r = Kd_{r-1}$, $r>1$,

heißt eine spektrale Folge (|29|3.12.). Wie in (5.6) definiert man $h_r : B \longrightarrow B^r =: SF^r$ als Homologiemorphismus von d_r (von $N \xrightarrow{Bd_r} B \xrightarrow{K^{\pi} d_r} N$!). Aus (5.25,5.26) in der Form (5.19,5.2o) folgt $Bd_r < Kd_r$ (es folgt (5.4)!) und man definiert $h_{\infty} : B \longrightarrow B^{\infty} =: SF^{\infty}$ als Homologiemorphismus von $N \xrightarrow{\cup Bd_r} B \xrightarrow{\cap K^{\pi} d_r} N$. SF^{∞} heißt der Limes von SF.

5.27. Nach |29| l.c. ist diese Auffassung der spektralen Folge äquivalent zu der Standardauffassung als Familie

(5.28) $(B^r, \bar{d}_r \mid o \leq r \varepsilon \mathbb{Z})$ mit eigentlichen Morphismen $\bar{d}_{r+1} : B^r \longrightarrow B^r$, so daß B^{r+1} Homologie (im gewöhnlichen Sinne in einer quasiexakten Katego-

rie) von $(B^r,\bar{d}_{r+1})$ ist [1]): Man zeigt (|29|3.14.), daß $\bar{d}_{r+1} := h_r d_{r+1} h_1^{\#}: B^r \longrightarrow B^r$, $o \leq r < \infty$ für die d_{r+1}, h_r, B^r ($B^o := B$) von 5.24. eigentliche Morphismen sind und $\bar{h}_{r+1} := h_{r+1} h_r^{\#}: B^r \longrightarrow B^{r+1}$ Homologiemorphismus von $\bar{d}_{r+1}$ ist. Nach 4.60. ist klar, daß B^{r+1} die Homologie im gewöhnlichen Sinne in einer quasiexakten Kategorie ist(Wir gehen nicht auf die Definition von B^{∞} in dieser Form ein, da die Konstruktion nicht ganz so einfach ist).

5.29. Für die aus dem exakten Paar

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\quad} & A \\ & {}_{j}\searrow \quad \nearrow_{k} & \\ & B & \end{array} =: (i;j,k) \quad (5.2)$$

gewonnene Spektrale Folge $(ji^{\# r-1}k \mid r \geq 1)$ von (5.3) schreiben wir SF(i;j,k) [2]).

5.30. Die spektrale Folge 5.29. läßt sich in der Form (5.28) ohne Zuhilfenahme der I-Kategorie K direkt in A beschreiben durch iterierte Bildung von abgeleiteten exakten Paaren (Abelsche Gruppen |26|;Abelsche Kategorien |18|). Natürlich geht man dann von einem A-Diagramm (5.2) aus, verlangt also $i \varepsilon A$. In den abgeleiteten exakten Paaren hat man noch mehr Information, als wir bisher angegeben haben. Man kann die nötigen Überlegungen leicht in K ausführen, aber wir sind aus den in der Einleitung erwähnten Gründen nicht daran interessiert.

Wir werden in Zukunft beide Formen (5.28) und 5.24. als spektrale Folge bezeichnen und gelegentlich auch einfach von den B^r als einer spektralen Folge $(B^r \mid 1 \leq r \leq \infty)$ sprechen.

5.31. Wir kommen jetzt zur Definition der "graduierten assozierten" Objekte (Morphismen) des exakten Paares. Die eingangs anzugebende Definition der Limites ist konsequent, wenn man Teile (Quotienten) eines Objektes einer Kategorie als Morphismen definiert. Limites sind von Moduln bekannt und werden in allgemeiner Form definiert in |24|, |16|, etwas spezieller bei |21| und in der unserer Definition nächsten Weise bei |18|. Wir gehen anschließend auf den Zusammenhang unserer Definition mit der üblichen bei Moduln ausführlich ein.

C sei eine graduierte Kategorie. Ein Morphismus dessen Quelle und Ziel gleich sind heißt ein Endomorphismus, ein Endomorphismus, der eine Äquivalenz ist, heißt Automorphismus. Wir betrachten die Kategorie $\tilde{C}$ mit

---

[2]) Zur Bezeichnung bemerke man die Indexverschiebung: SF^1 ist der E_2-Term der spektralen Folge in der Standardterminologie. Unsere Indizierung ist durch (5.14) motiviert.

[1]) Die Existenz der Homologie impliziert $\bar{d}\bar{d} = 0$ an jeder Stelle r.

(D1) Objekte von $\tilde{\underline{C}}$ sind die Endomorphismen von $\underline{C}$,

(D2) Morphismen $\gamma: f \longrightarrow g$ von $\tilde{\underline{C}}$ sind die kommutativen Diagramme

(5.32)
$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot \end{array} \qquad \text{mit } |\gamma| = o \ ^{1})$$

(D3) Die Komposition ist die von $\underline{C}$.

5.33. Für $f \varepsilon |\tilde{\underline{C}}|$ heißt ein Morphismus $g \xleftarrow{\alpha} f$ ein direkter Limes von f, wenn

(DirLim 1) g automorph ist und

(DirLim 2) zu $h \xleftarrow{\gamma} f$ mit automorphem h genau ein β mit $\beta\alpha = \gamma$ existiert.

Die zweite Bedingung wird durch das Diagramm

(5.34)
$$\begin{array}{ccc} g & \xleftarrow{\alpha} & f \\ & \searrow & \downarrow \\ & & h \end{array}$$
illustriert.

Der Standardterminologie käme es näher, g als Limes von f zu bezeichnen und α zu vernachlässigen. Wir legen jedoch ähnlich wie bei der Definition von Tei und Quo (2.16,2.19) Wert auf den durch α gegebenen Zusammenhang zwischen f und g.

(5.35) Aus der universellen Eigenschaft (DirLim 2) folgt wie üblich, daß β eine Äquivalenz ist, wenn sowohl α als auch γ direkte Limites von f sind. Zu $f \varepsilon |\tilde{\underline{C}}|$ sei ein fester Limes gewählt, falls überhaupt ein Limes existiert. Für automorphe f kann die Identität als Limes gewählt werden.

5.36. Dual definiert man inverse Limites $f \xleftarrow{\beta} g$ von f. Inverse Limites werden durch das Diagramm

(5.37)
$$\begin{array}{ccc} f & \xleftarrow{\beta} & g \\ \uparrow & \nearrow & \\ h & & \end{array}$$
charakterisiert. Es gilt die zu (5.35) duale Bemerkung.

5.38. Wir kehren jetzt zu dem Diagramm (5.2) zurück und verlangen $i \varepsilon \underline{A}$. Existiert zu i der direkte Limes $. \xleftarrow{\alpha} i$, so heißt

(5.39) $\mathrm{coki}\,\mathrm{coba} =: \mathrm{dirassi}$ ²)

der zu i direkt assoziierte Morphismus. dirassi ist ein Quotient von A. Den Zusammenhang mit der üblichen Definition stellen wir in 5.74. her.

5.40. Nach Definition von $. \xleftarrow{\alpha} i$ als direkter Limes von i haben wir ein

---

¹) Das ist ungenau; wir wollen γ jedoch auch als Morphismus von $\underline{C}$ auffassen. Genauer ist $f \longrightarrow g$ ein Tripel (f,g,γ) etc..

²) α als Morphismus von $\underline{A}$!

kommutatives Diagramm $A \xrightarrow{i} A$, $\alpha\downarrow$, $\downarrow\alpha$, $\cdot \xrightarrow{'i} \cdot$

(5.41) , in dem 'i eine Äquivalenz ist.

Daraus erhalten wir für jedes n, $o \leq n \in \mathbb{Z}$, ein kommutatives Diagramm

$A \xrightarrow{i^n} A$, $\alpha\downarrow$, $\downarrow\alpha$, $\cdot \xrightarrow{'i^n} \cdot$

(5.42) , aus dem wir ein kommutatives Diagramm (ausgezogene Pfeile; vgl. (2.13), wir tragen nur die hier wesentlichen Teile ein)

$\cdot \xrightarrow{keri^n} A \xrightarrow{cobi^n} \cdot \longrightarrow A$, $\downarrow$, $coba\downarrow$, $\swarrow \gamma$, $\downarrow\alpha$, $\downarrow$inj., $N \xrightarrow[ker'i^n=0]{} \cdot \xrightarrow{'i^n} \cdot$

(5.43) ableiten. Darin ist

$\alpha keri^n = 0$ wegen der Kommutativität des linken Quadrats, dann aber schon $(coba)keri^n = 0$, da der Rest injektiv ist. γ existiert wegen $cobi^n = cokkeri^n$. Also ist

(5.44) $coba <_r cobi^n$ für alle n, daher

(5.45) $coba <_r \bigwedge cobi^n$.

5.46. Wir hatten bereits in 5.23.(3,4) bemerkt, daß $i^n W < i^{n-1} W < \ldots < iW < W$ ist. Daraus folgt für eigentliches i:

(5.47) $bili^n <_l bili^{n-1} <_l \ldots <_l bili <_l 1_A$ (4.59) und dual

(5.48) $cobi^n <_r cobi^{n-1} <_r \ldots <_r cobi <_r 1_A$. Der Beweis ist auch direkt in $\underline{A}$ ausgeführt einfach: Aus (2.12!)

$A \xrightarrow{i^{n-1}} A$, $1\downarrow$, $\downarrow i$, $A \xrightarrow{i^n} A$

(5.49) für $n \geq 1$ erhält man (2.13!)

$\cdot \longrightarrow A \xrightarrow{cobi^{n-1}} \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow A \longrightarrow \cdot$, $\downarrow$, $1\downarrow$, $\downarrow$, $\downarrow$, $\downarrow i$, $\downarrow$, $\cdot \longrightarrow A \xrightarrow{cobi^n} \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow A \longrightarrow \cdot$

(4.50)

4.51. Bevor wir das Ergebnis zusammenfassen kehren wir zu 5.38. zurück und definieren unter der Annahme, daß der inverse Limes $i <\!\!\xleftarrow{\beta}$. von i existiert,

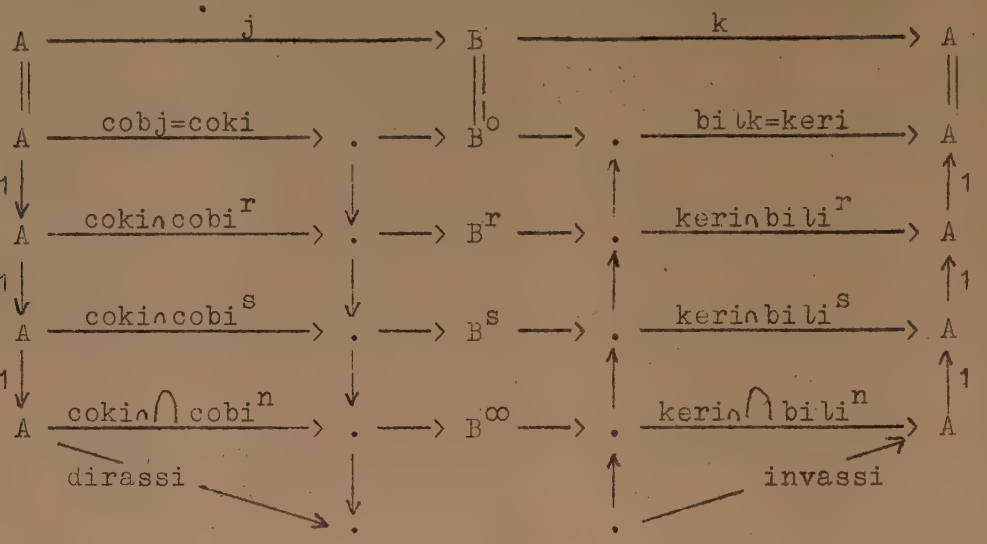
(5.52) $keri \wedge bil\beta =: invassi \in Tei A$.

Dual zu (5.45) haben wir

(5.53) $bil\beta <_l \bigwedge bili^n$.

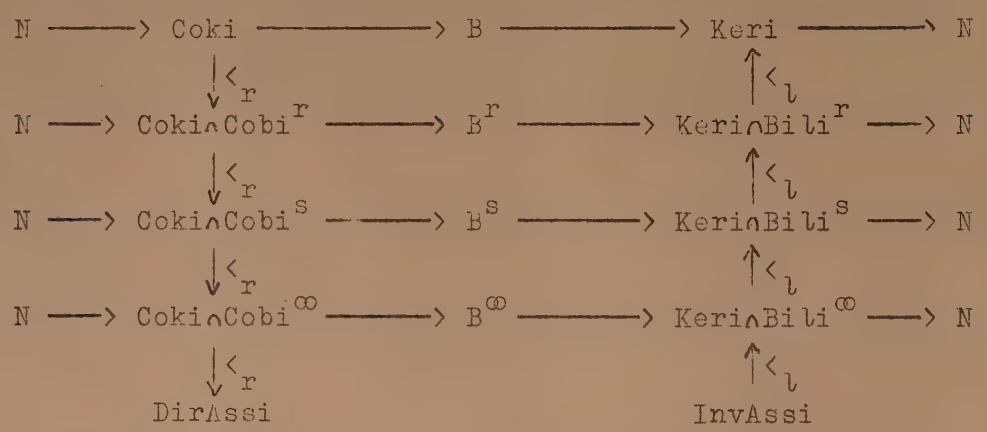
5.54. Zusammengefaßt erhalten wir bei $r \leq s$ ein Diagramm

(5.55)



dessen Eigenschaften wir suggestiver in dem Diagramm

(5.56)



mit kurz exakten Zeilen formulieren (5.11.-(5.14)).

Ist man an den abgeleiteten exakten Paaren interessiert, so kann man in (5.55) natürlich die $A \longrightarrow B^t \longrightarrow A$ in $A \longrightarrow Cobi^t \longrightarrow B^t \longrightarrow Bili^t \longrightarrow A$ zerlegen, da z.B. $bili^t \wedge keri \leq_l bili^t \leq_l 1_A$ ist. $Bili^t = Cobi^t$ sind die A-Terme des t-ten abgeleiteten exakten Paares in der Standard- bzw. dazu dualen Form. Den i entsprechenden Morphismus stellt man dann für endliches t ebenfalls leicht her.

5.57. Als klassischen Fall der schwachen Konvergenz (|1o|xv,2.2.) hat man

(5.58) $Coki \circ Cobi^{\infty} = DirAssi$ und $Keri \circ Bili^{\infty} = N$.

$Coki \circ Cobi^{\infty} = DirAssi$ folgt aus der Annahme

(5.59) $\bigwedge cobi^n = cob\alpha$.

In der äquivalenten Formulierung

(5.60) $\bigvee keri^n = ker\alpha$ erkennt man aus |21|Prop.1.8. den Zusammen-

hang zu dem Axiom AB5 von GROTHENDIECK |21|. AB5 gilt für Moduln (|21| 1.5.). Wir gehen hierauf noch ein (5.79). Im allgemeinen wird man nicht AB5 für $\underline{A}$ voraussetzen, sondern (5.59) für i fordern.

Dual zur klassischen schwachen Konvergenz ist

(5.61) $\mathrm{Ker}_i \mathrm{Bil}_i^{\infty} = \mathrm{InvAss}_i$ und $\mathrm{Cok}_i \mathrm{Cob}_i^{\infty} = N$.

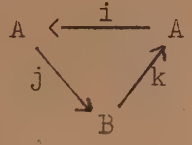
Dabei folgt $\mathrm{InvAss}_i = \mathrm{Ker}_i \mathrm{Bil}_i^{\infty}$ über

(5.62) $\bigcap \mathrm{bil}_i^n = \mathrm{bil}_\beta$ aus GROTHENDIECK AB5*. AB5* gilt für Moduln im allgemeinen nicht. Man fordert (5.62) für i und bei Anwendungen hat man bei gegebenem i nachzuprüfen, ob (5.62) gilt (|17|,|22|: good filtration). Interesse für InvAss_i (in der Form (5.73)) scheint, wie ECKMANN-HUBER (|17|) bemerken, zum ersten Male bei |20| zu bestehen. ECKMANN-HUBER weisen auch auf die Dualität zum klassischen Fall und den Zusammenhang zu den GROTHENDIECK-Axiomen hin.

5.63. Wir stellen den Zusammenhang zur Standarddefinition der graduierten Assoziierten bei einem Beispiel her:

$\underline{\mathrm{Mod}}$ sei die Kategorie der Moduln über einem festen Ring, $\underline{A} := \underline{\mathrm{Mod}}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ (1.9.) die Kategorie der Doppelfolgen $(A_{p,q} \mid p,q\in\mathbb{Z})$ von Moduln mit Doppelfolgen $f_{p,q}: A_{p,q} \longrightarrow B_{p+r,q+s}$ als Morphismen vom Grade (r,s) [1]).

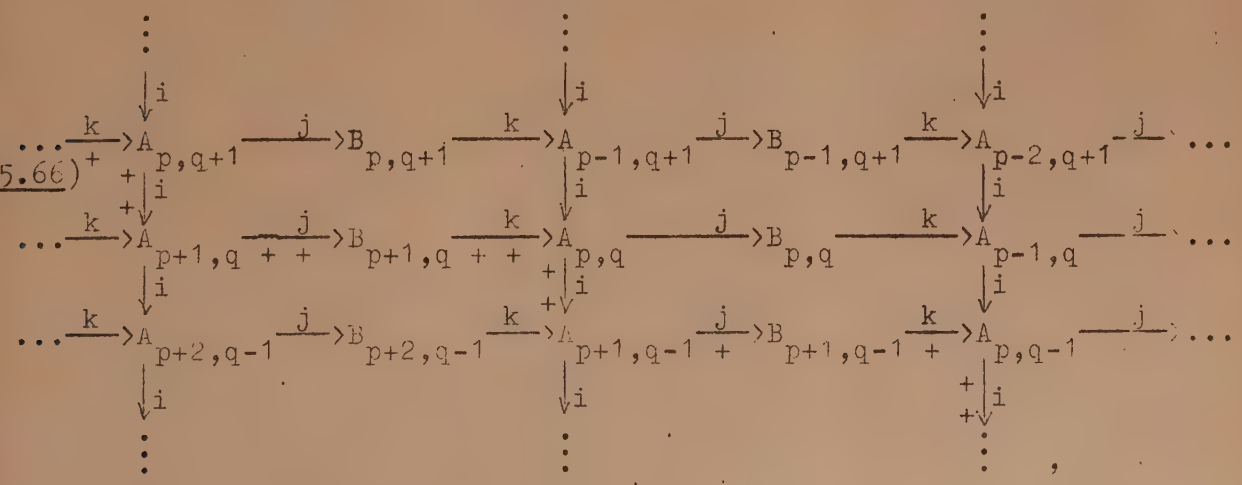
Für

(5.64)


wählen wir eine feste Graduierung

(5.65) $|i| = (1,-1)$, $|j| = (0,0)$, $|k| = (-1,0)$ (|23|:∂-couple),

dann lösen wir das exakte Paar wie üblich auf in ein Diagramm

(5.66)


in dem wir eine der exakten Folgen von (5.64) besonders gekennzeichnet haben.

Schließt man die Spalten der $A_{r,t}$ unten und oben durch den direkten

[1]) Man hat dann $\underline{K}$ mit 4.69.; wir benötigen $\underline{K}$ hier aber nicht.

bzw. inversen Limes

(5.67) $A_s^{dir} := DirLim(A_{p,q}|p+q=s)$,
$A_s^{inv} := InvLim(A_{p,q}|p+q=s)$ ab (Limes im gewöhnlichen Sinne

für Moduln: z.B. |19|viii.4 und viii.3), so hat man Homomorphismen

(5.68) $A^{dir}_{p+q} \xleftarrow{\alpha_{p,q}} A_{p,q} \xleftarrow{\beta_{p,q}} A^{inv}_{p+q}$ mit

(5.69) $\alpha_{p,q} = \alpha_{p+1,q-1}\,i$, $\beta_{p,q} = i\beta_{p-1,q+1}$.

Wegen (5.69) liefern die α, β Filterungen

(5.70) $A^{dir}_{p+q} \supset \ldots \supset Bil\alpha_{p+1,q-1} \supset Bil\alpha_{p,q} \supset Bil\alpha_{p-1,q+1} \supset \ldots$ und

(5.71) $A^{inv}_{p+q} \supset \ldots \supset Ker\beta_{p+1,q-1} \supset Ker\beta_{p,q} \supset Ker\beta_{p-1,q+1} \supset \ldots$

und man definiert graduierte Moduln StDirAssi und StInvAssi durch

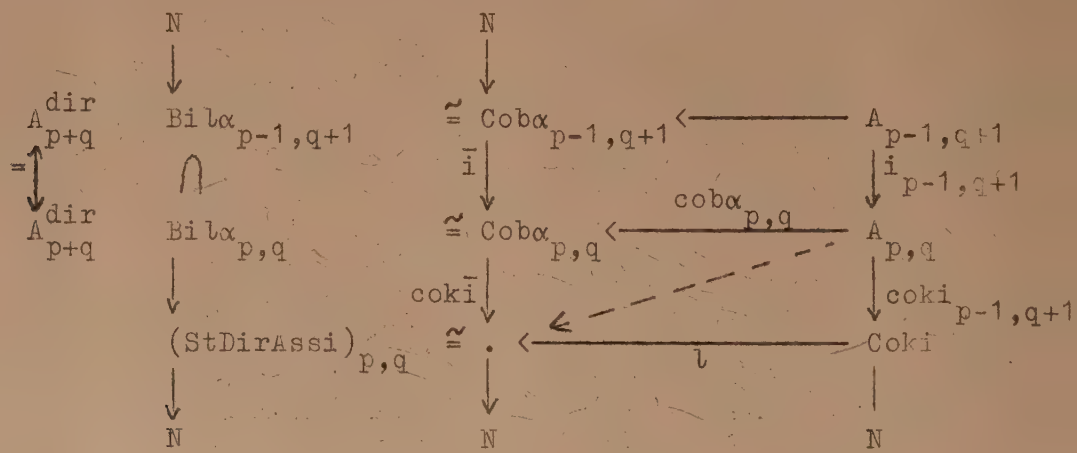
(5.72) $(StDirAssi)_{p,q} := Bil\alpha_{p,q}/Bil\alpha_{p-1,q+1}$,

(5.73) $(StInvAssi)_{p,q} := Ker\beta_{p+1,q-1}/Ker\beta_{p,q}$,

die für p+q=s Subquotientenfolgen von A_s^{dir} bzw. A_s^{inv} sind.
Die Definitionen scheinen zunächst nicht zueinander dual zu sein und die Wahl der Indizes in (5.73) scheint obskur. Sie wird sich jedoch in 5.77. als die richtige herausstellen.

5.74. StDirAssi untersuchen wir mit dem Diagramm

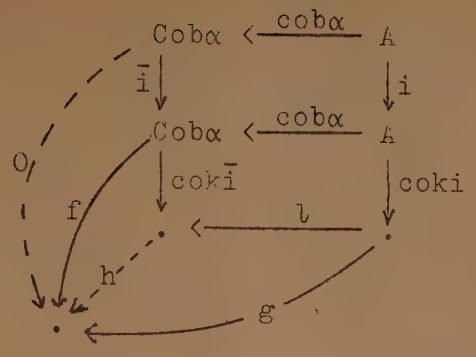
(5.75)



mit exakten Spalten. Dabei ist StDirAssi $\cong$ Coki$\bar{i}$ trivial. Wir zeigen, daß $(coki\bar{i})cob\alpha_{p,q} = cob\alpha_{p,q} \wedge coki_{p-1,q+1} = (dirassi)_{p,q}$ ist [1]). Dabei gilt die zweite Gleichung nach Definition(5.52).
Die Existenz von l folgt aus (2.12,2.13), also ist $(coki\bar{i})cob\alpha < cob\alpha \wedge coki$.

[1]) Genauer: der durch $(coki\bar{i})cob\alpha_{p,q}$ repräsentierte Teil von $A_{p,q}$.

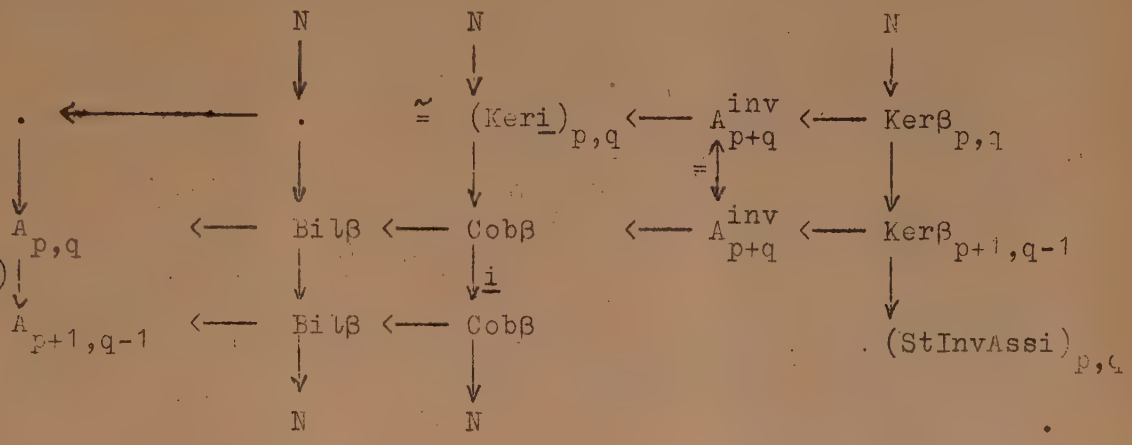
(5.76)



Dann betrachten wir das nebenstehende Diagramm. Ist $f\,cob\alpha = g\,cok\bar{i}$, d.h. $f\,cob\alpha = g\,cok\bar{i} < cob\alpha \wedge coki$, so ist $f\bar{i}\,cob\alpha = g(coki)i = 0$, man hat h mit $f = h\,cok\bar{i}$ und rechnet nach, daß $hl = g$ ist. Damit ist $(cok\bar{i})cob\alpha = cob\alpha \wedge coki = dirassi$ (Vergleiche [1] von Seite 36).

5.77. StInvAssi untersuchen wir mit

(5.78)



Aus dem Ker-Cok-Lemma (z.B. |25| ii.5.2.(Modulη)) [1]) folgt $(StInvAssi)_{p,q} = (Keri)_{p,q}$. Der Rest ist dual zu 5.74.. Aus (5.75), (5.78) wird die Wahl der Indizes in (5,7o,5.71) verständlich.

5.79. In den Anwendungen interessiert man sich für die Assoziierten meist in der Form (5.7o,5.71). Die Überlegungen 5.74.,5.77. lassen sich genauso für eine abelsche Kategorie an Stelle von Mod durchführen, wenn die Limites (5.67) existieren. In dieser Form der Limites ist der Zusammenhang zu den GROTHENDIECK-Axiomen klar. Wir wiederholen jetzt nocheinmal die Standarddefinition der Assoziierten in Indexfreier und zueinander dualer Form:

(5.8o) $StDirAssi := Cok(\ Bil\alpha \longrightarrow Bil\alpha)$,

(5.81) $StInvAssi := Ker(Cob\beta \longrightarrow Cob\beta) = Cok(Ker\beta \longrightarrow Ker\beta)$

5.82. Schließlich erwähnen wir, daß man das Diagramm (5.56) für Fälle wie $\underline{A} = \underline{A}'^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ durch Anbringen von Indizes auch für genauere Konvergenzuntersuchungen heranziehen kann (häufig ist z.B. $(Keri\ Bili^r)_{p,q} = N$, wobei r von (p,q) abhängt). Wir tuen dies als Beispiel in (11.7).

---

[1]) Exakte Homologiefolge einer kurz exakten Folge von Kettenkomplexen.

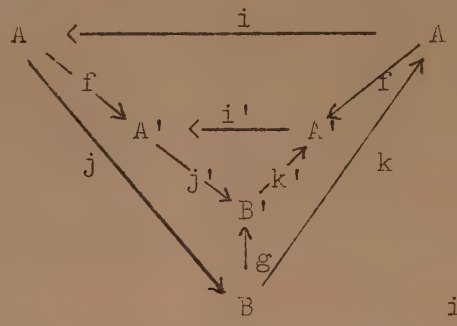
5.83. Wir kehren zu (5.2) zurück, nehmen jetzt $i \varepsilon \underline{A}$ an und untersuchen die funktoriellen Eigenschaften. Ist $A' \xleftarrow{i'} A' \xleftarrow[k']{j'} B' =: (i';j',k')$ ein weiteres exaktes Paar in $\underline{A}$, so heißt ein Paar (f,g) von Morphismen $f:A \longrightarrow A'$, $g:B \longrightarrow B'$ mit

(5.84) $i'f = fi$, $j'f = gj$, $k'g = fk$ [1])

ein Morphismus $(f,g):(i;j,k) \longrightarrow (i';j',k')$ von exakten Paaren [2]).

(5.84) wird durch

(5.85)



illustriert. Das Diagramm ist noch etwa kommutativ. Lediglich die Außentrapeze sind kommutativ.

Wir beschränken uns auf den Fall

(5.86) $|f| = |g| = o$,

da dies für unsere Anwendungen genügt [3]). Die Komposition der Morphismen von exakten Paaren wird paarweise durch die Komposition von $\underline{A}$ definiert.

5.87. $SF = (B \xrightarrow{d_r} B|r)$, $SF' = (B' \xrightarrow{d'_r} B'|r)$ seien spektrale Folgen. Ein Prämorphismus $g:SF \longrightarrow SF'$ ist ein Morphismus $g \varepsilon \underline{A}_o(B,B')$ (ist ein Tripel...) mit

(5.88) $gBd_r < Bd'_r$ und $Kd_r < g^{\shortparallel} Kd'_r$ für alle r.

K-O-dual erhält man einen Prämorphismus $g:SF' \longrightarrow SF$.

Aus (5.88) folgt

(5.89) $g \bigcup Bd_r < \bigcup gBd_r$ (4.68.:Dg=W) $< \bigcup Bd'_r$ und $\bigcap Kd_r < g^{\shortparallel} \bigcap Kd'_r$ (K-O-dual, Ig=w), so daß g eigentliche Morphismen

(5.90) $g_r := h'_r g h^{\shortparallel}_r : SF^r \longrightarrow SF'^r$, $1 \leq r \leq \infty$ induziert (4.49). Ist $g:SF \longrightarrow SF'$ ein Prämorphismus, so heiße die Familie

(5.91) $(g_r = h'_r g h^{\shortparallel}_r : SF^r \longrightarrow SF'^r \mid 1 \leq r \leq \infty)$ ein Morphismus $SF \longrightarrow SF'$.

Der Übergang von Prämorphismen zu Morphismen ist funktoriell (4.56).

---

[1]) Man kommt mit schwächeren Bedingungen aus: (5.91), 5.92..

[2]) genauer: $((i;j,k),(i';j',k'),(f,g))$

[3]) Diese Einschränkung dient nur zur Vermeidung von Vorzeichen bei der Anwendung auf stabile Kategorien.

5.92. In der Standardauffassung der spektralen Folge (5.27) als Familie $(B^r, \bar{d}_{r+1} | r \geq o)$ definiert man einen Morphismus meist als Folge $g_r : B^r \longrightarrow B'^r$, $r \geq o$, so daß

(5.93) $g_r \bar{d}_{r+1} = \bar{d}'_{r+1} g_r$, $r \geq o$ gilt und daß g_{r+1} von g_r induziert wird. Die letzte Bedingung lautet in unserer Terminologie

(5.94) $g_{r+1} = \bar{h}'_{r+1} g_r \bar{h}^{\#}_{r+1}$.

Unseres Erachtens dient (5.93) lediglich dazu, zu zeigen, daß $g_{r+1} = \bar{h}'_{r+1} g_r \bar{h}^{\#}_{r+1}$ (was man in $\underline{K}$ immer bilden kann) ein eigentlicher Morphismus (und damit in $\underline{A}$ überhaupt definierbar) ist. Wir erreichen mittels $\underline{K}$ einen eigentlichen Morphismus bereits unter der Vorraussetzung (5.88). Will man trotzdem (5.93) sichern, so setzt man statt (5.88) die stärkere Bedingung

(5.95) $gd_{r+1} < d'_{r+1} g$, $r \geq o$ voraus (Kettenmorphismus: 4.5o.)

Wie in 4.5o. gezeigt folgt (5.88) aus (5.95), so daß die $g_r := h'_r g h^{\#}_r$ eigentlich sind. Da g und d_1, d'_1 eigentlich sind, kann man in (5.95) für r=o das Gleichheitszeichen setzen. Für r>o ist $g_r \bar{d}_{r+1} = h'_r g h^{\#}_r h_r d_{r+1} h^{\#}_r = h'_r g d_{r+1} h^{\#}_r$ (s.u.) $< h'_r d'_{r+1} g h^{\#}_r$ (5.95) $= h'_r d'_{r+1} h^{\#}_r h'_r g h^{\#}_r = \bar{d}'_{r+1} g_r$, die erste und letzte Gleichung gelten nach Definition und die zweite und vorletzte Gleichung folgen aus $h^{\#}_r h_r d_{r+1} = d_{r+1}$ (4.21) wegen $Ih^{\#}_r = Kh_r = Bd_r = Id_{r+1}$, $Bh^{\#}_r = Dh_r = Kd_r = Dd_{r+1} > Kd_{r+1} > Bd_{r+1}$ und K-O-dual $d'_{r+1} h'^{\#}_r h'_r = d'_{r+1}$ (4.21) wegen $Kh'_r = Bd'_r = Id'_{r+1} < Bd'_{r+1} < Kd'_{r+1}$ und $Dh'_r = Kd'_r = Dd'_{r+1}$. Dann bemerkt man, daß auf beiden Seiten von $g_r \bar{d}_{r+1} < \bar{d}'_{r+1} g_r$ eigentliche Morphismen stehen, so daß Gleichheit herrscht.

Ohne Voraussetzung von (5.95) folgt (5.94) bereits aus (5.88): $g_{r+1} = h'_{r+1} g h^{\#}_{r+1} = h'_{r+1} h'^{\#}_r h'_r g h^{\#}_r h_r h^{\#}_{r+1} = \bar{h}_{r+1} g_r \bar{h}^{\#}_{r+1}$, wobei $h_{r+1} h^{\#}_r h_r = h_{r+1}$ (4.21) wegen $Kh_r = Bd_r < Bd_{r+1} = Kh_{r+1}$, $Dh_r = Kd_r > Kd_{r+1} = Dh_{r+1}$ und die K-O-duale Formel für h' benutzt wurden.

5.96. Ist $(f,g):(i;j,k) \longrightarrow (i';j',k')$ ein Morphismus von exakten Paaren[1], so ist $g:SF(i;j,k) \longrightarrow SF(i';j',k')$ ein Prämorphismus von spektralen Folgen. Wir schreiben $(g_r | r \geq 1) =: SF(f,g)$. SF ist ein Funktor von exakten Paaren und ihren Morphismen in spektrale Folgen und ihre Morphismen (Prämorphismen). f leistet keinen Beitrag zu SF(f,g), sondern dient nur zum Nachweis von (5.88). Wir zeigen, daß sogar (5.95) gilt: Aus $i'f = fi$ folgt $i'^{\#} i' f i^{\#} = i'^{\#} f i i^{\#}$ und daraus $fi^{\#} < i'^{\#} i' f i^{\#}$ (4.32: Di'=W) $= i'^{\#} f i i^{\#} < i'^{\#} f$ (4.29: Ii=w). Dann rechnet man nach: $gd_r = g j i^{\#r-1} k =$

[1])Nach 5.83. ist i∈A!

$= j'fi^{\#r-1}k < j'i'^{\#r-1}fk = j'i'^{\#r-1}k'g = d_r'g.$

5.98. $(f,g):(i;j,k) \longrightarrow (i';j',k')$ sei weiter ein Morphismus von exakten Paaren. Wir bilden Diagramme (5.55) für $(i;j,k)$ und (5.55)' für $(i';j',k')$, die wir uns in zwei parallelen Ebenen übereinandergeschrieben denken. Die Mittelspalten verbinden wir mit $g:B \longrightarrow B'$ und den $SF^n g:B^n \longrightarrow B'^n$ und die Stellen A mit A' durch $f:A \longrightarrow A'$. Sämtliche anderen Stellen sind Quotienten oder Teile von A, A'. Ist $q:A \longrightarrow Q$ einer der Quotienten von A ($q = \mathrm{coki} \wedge \bigwedge^n \mathrm{coki}^{\iota}$, $n=o,r,s,\infty$ oder $q = \mathrm{dirassi}$) und $q':A' \longrightarrow Q'$ der entsprechende Quotient von A', so definieren wir $q'fq^{\#}:Q \longrightarrow Q'$ und dual (nach Umbenennung) für die Teile $t'^{\#}ft:T \longrightarrow T'$ und behaupten:

(1) die $q'fq^{\#}$, $t'^{\#}ft$ sind eigentliche Morphismen,

(2) das Gesamtdiagramm (5.55) $\longrightarrow$ (5.55)' ist kommutativ.

Alle Konstruktionen, in denen die Limites dirassi und invassi vorkommen, gelten natürlich unter Voraussetzung der Existenz der Limites. Die restlichen Betrachtungen sind jedoch hiervon unabhängig.

Beweis: (1) Trivial ist $D(q'fq^{\#}) = qf^{\#}q'^{\#}W = qf^{\#}W = qW = W$, da q', f eigentlich (D-regulär) und q epimorph (B-regulär) sind.

Zunächst sei $q = \mathrm{coki} \wedge \bigwedge^n \mathrm{cobi}^{\iota}$. Dann ist $I(q'fq^{\#}) = q'fq^{\#}w =$
$= q'f(iW \vee \bigcup^n i^{\#\iota}w)$ (4.67,4.68,4.59) $< q'(fiW \vee \bigcup fi^{\#\iota}w)$ (4.68: Df=W) $<$
$< q'(i'fW \vee \bigcup i'^{\#\iota}fw)$ ($fi = i'f$; $fi^{\#} < i'^{\#}f$ nach 5.97 Beweis) $<$
$< q'(i'W \vee \bigcup i'^{\#\iota}w$ ($i'fW < i'W$ und $fw = w$) $= q'q'^{\#}w = q'w$(4.24)$= w$(q' eigentlich).

Dann sei $q = \mathrm{dirassi} = \mathrm{coki} \wedge \mathrm{cob}\alpha$. Wir leiten aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\ i\ } & A \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ A' & \xleftarrow{\ i'\ } & A' \end{array}$$

, d.h. $f:i \longrightarrow i'$ (5.22) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xleftarrow{\ \alpha\ } & i \\ \overset{o}{f}\downarrow & & \downarrow f \\ \cdot & \xleftarrow{\ \alpha'\ } & i' \end{array}$$

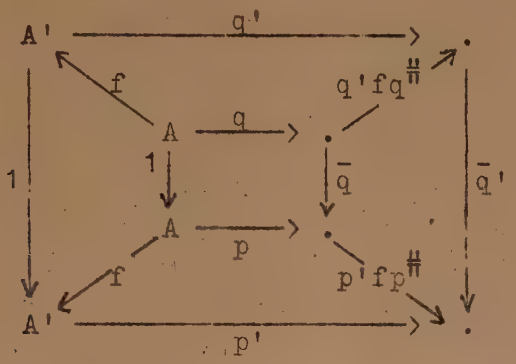
für die direkten Limites α, α' her, indem wir die universelle Eigenschaft (5.34) auf

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xleftarrow{\ \alpha\ } & i \\ & \swarrow & \downarrow f \\ \cdot & \xleftarrow{\ \alpha'\ } & i' \end{array}$$

anwenden. Aus $\alpha'f = \overset{o}{f}\alpha$ folgt $\alpha'^{\#}\alpha'f\alpha^{\#} = \alpha'^{\#}\overset{o}{f}\alpha\alpha^{\#}$ und daraus $f\alpha^{\#} < \alpha'^{\#}\alpha'f\alpha^{\#}$(4.32: $D\alpha'=W$)$= \alpha'^{\#}\overset{o}{f}\alpha\alpha^{\#} <$
$< \alpha'^{\#}\overset{o}{f}$(4.29: $I\alpha=w$) wie in 5.97. (Beweis). Dann ist $I(q'fq^{\#}) = q'fq^{\#}w =$
$q'f(iW \vee \alpha^{\#}w) < q'(fiW \vee f\alpha^{\#}w(4.68)< q'(i'fW \vee \alpha'^{\#}\overset{o}{f}w) < q'(i'W \vee \alpha'^{\#}w)$ $(\overset{o}{f}w = w) =$
$= q'q'^{\#}w = q'w = w.$

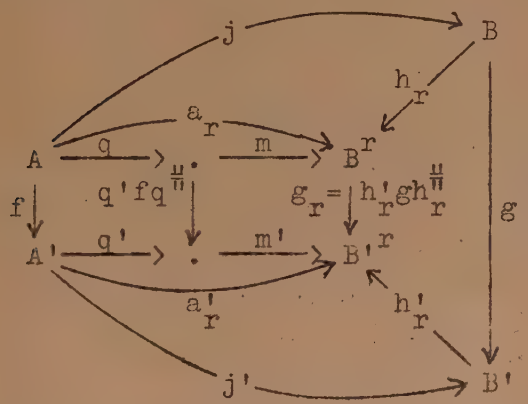
K-O-dual sind die Behauptungen über die Teile.

(2) Die Behauptung über die Kommutativität enthält die Kommutativität der beiden Diagramme (5.55) und (5.55)', die wegen der Exaktheit der Mittelzeiten trivial ist. Dann seien zunächst $p:A \longrightarrow P$, $q:A \longrightarrow Q$ zwei Quotienten von A und o.B.d.A. $p = \bar{q}q$ mit epimorphem $\bar{q}$ (d.h. $p <_r q$). p', q' mit $p' = \bar{q}'q'$ seien die entsprechenden Quotienten von A'. Es ist (Diagramm!) $p'fp''\bar{q} = p'fp''pq''$ $(pq'' = \bar{q}qq'' = \bar{q}(4.29,4.3o)) > p'fq''(4.32) =$



$= \bar{q}'q'fq''(p' = \bar{q}'q')$. Da auf beiden Seiten eigentliche Morphismen stehen, besteht Gleichheit. Natürlich ist auch der Fall $q = 1_A$, $q' = 1_{A'}$ enthalten. Dual (in $\underline{A}$) ist die Behauptung über die Teile.

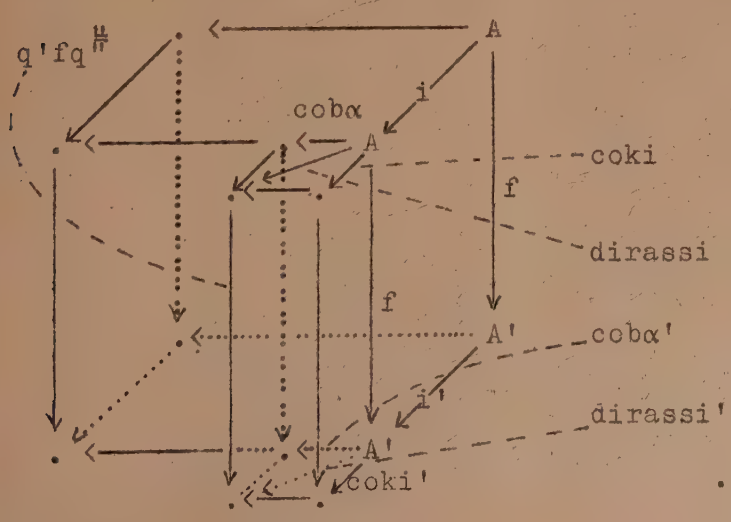
Dann sei $q:A \longrightarrow Q$ ein Quotient $q = \mathrm{coki}\, a \wedge^{n} \mathrm{cobi}\, b$. Es ist (Diagramm!)



$m'q'fq'' = a'_r fq'' = h'_r j'fq'' = h'_r gjq'' >$
$> h'_r gh''_r h_r jq''(h'_r g > h'_r gh''_r h_r$ nach 4.48) $=$
$= g_r a_r q'' = g_r mqq'' = g_r m(4.29,4.3o)$.
Auf beiden Seiten von > stehen eigentliche Morphismen. Daher besteht Gleichheit. Die Behauptung über die andere Seite des Diagramms (5.55) —> (5.55)' ist K-O-dual.

$(mq = a_r$, $m'q' = a'_r$ (Definition von m, m', da q, q' surjektiv))

Die Konstruktion der $q'fq''$, $t''ft$ hätten wir ebenso einfach direkt in $\underline{A}$ durchführen können mit (z.B. für q = dirassi) dem Diagramm



Die $q'fq''$ sind nach Konstruktion eigentliche Morphismen. Aus der Konstruktion ergeben sich auch bereits die Kommutativitäten $p'fp''\bar{q} = \bar{q}'q'fq''$. Will man jedoch $m'q'fq'' = g_r m$ beweisen, so muß man entweder g_r in $\underline{A}$ charakterisieren, wie wir das in 4.6o. taten, oder $q'fq''$ in dieser Form in $\underline{K}$ definieren.

5.98. $SF = (B \xrightarrow{d_r} B \mid r \geq 1)$, $SF' = (B \xrightarrow{d'_r} B' \mid r \geq 1)$ seien zwei spektrale Folgen und $g, \bar{g}: SF \longrightarrow SF'$ seien zwei Prämorphismen. Eine Homotopie $\phi: g \longrightarrow \bar{g}$ von g in $\bar{g}$ ist ein Morphismus $\phi: B \longrightarrow B'$ mit

(5.99) $d'_1\phi + \phi d_1 = g - \bar{g}$.

Existiert eine Homotopie $g \longrightarrow \bar{g}$, so heißt g homotop zu $\bar{g}$. Die Relation "homotop" ist eine Äquivalenzrelation. Dualisierung eines Paares homotoper Prämorphismen ergibt wieder ein solches Paar

SATZ: Sind $g, \bar{g}: SF, \longrightarrow SF'$ homotope Prämorphismen, so sind die zugehörigen Morphismen gleich (i.e. $g_r = \bar{g}_r$, $r \geq 1$).

Beweis: Zunächst ist $\bar{g}_r = h'_r \bar{g} h''_r = h'_r(g - \phi d_1 - d'_1\phi)h''_r$. Man hüte sich, hier distributiv weiterzurechnen: Die Addition ist eine Struktur in $\underline{A}$ und nicht in $\underline{K}$. Nach Konstruktion (4.54.) ist $h_r = e_r m''_r$ mit epimorphem e_r, monomorphem m_r und $Bm_r = Kd_r$ (bzw. Kd_r), also $h''_r = m_r e''_r$. Für $h'_r{}''$ wählen wir die am Schluß von 4.54. angedeutete K-O-duale Zerlegung, die $h'_r = m'_r{}'' e'_r$ liefert. Damit ist $h'_r(g - \phi d_1 - d'_1\phi)h''_r = m'_r{}'' e'_r(g - \phi d_1 - d'_1\phi)m_r e''_r =$
$= m'_r{}''(e'_r g m_r - e'_r \phi d_1 m_r - e'_r d'_1 \phi m_r)e''_r$, denn mit den eigentlichen Morphismen e'_r, m_r können wir distributiv rechnen. Wegen $Bm_r = Kd_r$ (bzw. $\bigcap Kd_r$) $<$ $< Kd_1$ (5.26, 5.19, 5.2o) ist $m_r <_l kerd_1$ (4.58., 4.59.), also $m_r = (kerd_1)\bar{m}_r$ und dual $e'_r = \bar{e}'_r cokd'_1$. Daher ist $e'_r \phi d_1 m_r = e'_r \phi d_1 (kerd_1)\bar{m}_r = 0$ und $e'_r d'_1 \phi m_r = \bar{e}'_r (cokd'_1) d'_1 \phi m_r = 0$, insgesamt also $\bar{g}_r = h'_r \bar{g} h''_r = m'_r{}'' e'_r g m_r e''_r = g_r$.

5.1oo. Zwei Morphismen (f,g), $(\bar{f},\bar{g}): (i;j,k) \longrightarrow (i';j',k')$ von exakten Paaren heißen homotop, wenn ein Morphismus $\phi: B \longrightarrow B'$ existiert mit

(5.1o1) $j'k'\phi + \phi jk = g - \bar{g}$.

Die Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation. Dualisierung eines Paares homotoper Morphismen von exakten Paaren ergibt wieder ein solches Paar.

Die Homotopierelation ist leicht verallgemeinert von |26|. In |26| wird noch zusätzlich

(5.1o2) $k\phi j = f - \bar{f}$ verlangt.

5.1o3. Nach 5.98. definieren (f,g) und $(\bar{f},\bar{g})$ je einen Morphismus von Diagrammen (5.55) $\longrightarrow$ (5.55)'.

SATZ: Diese Morphismen stimmen überein auf dem folgenden Teildiagramm (5.1o4) von (5.55).

Beweis: Die Übereinstimmung auf der Mittelspalte folgt aus 5.98., da nach (5.1o1) die Prämorphismen $g, \bar{g}: SF(i;j,k) \longrightarrow SF(i';j',k')$ homotop sind. Die Übereinstimmung auf $Coki \cap Cobi$ folgt, da

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Coki\ Cobi} & \longrightarrow & B^1 \\ {\scriptstyle g,\bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle SF^1 g = SF^1 \bar{g}} \\ \mathrm{Coki'\ Cobi'} & \longrightarrow & B'^1 \end{array}$$

mit g und $\bar{g}$ kommutativ ist und $\mathrm{Coki'} \wedge \mathrm{Cobi'} \longrightarrow B'^1$ injektiv ist. Dann folgt die Übereinstimmung auf der linken Spalte von (5.1o4) aus der Kommutativität und da die $\mathrm{Coki} \wedge \mathrm{Cobi} \longrightarrow \ldots$ surjektiv sind. Die Übereinstimmung rechts folgt dual.

(5.1o4)

$$\begin{array}{ccccccc}
N & \longrightarrow & \mathrm{Coki} \wedge \mathrm{Cobi} & \longrightarrow & B^1 & \longrightarrow & \mathrm{Keri} \wedge \mathrm{Bili} \longrightarrow N \\
 & & \downarrow{\scriptstyle <_r} & & & & \uparrow{\scriptstyle <_l} \\
N & \longrightarrow & \mathrm{Coki} \wedge \mathrm{Cobi}^r & \longrightarrow & B^r & \longrightarrow & \mathrm{Keri} \wedge \mathrm{Bili}^r \longrightarrow N \\
 & & \downarrow{\scriptstyle <_r} & & & & \uparrow{\scriptstyle <_l} \\
N & \longrightarrow & \mathrm{Coki} \wedge \mathrm{Cobi}^s & \longrightarrow & B^s & \longrightarrow & \mathrm{Keri} \wedge \mathrm{Bili}^s \longrightarrow N \\
 & & \downarrow{\scriptstyle <_r} & & & & \uparrow{\scriptstyle <_l} \\
N & \longrightarrow & \mathrm{Coki} \wedge \mathrm{Cobi}^\infty & \longrightarrow & B^\infty & \longrightarrow & \mathrm{Keri} \wedge \mathrm{Bili}^\infty \longrightarrow N \\
 & & \downarrow{\scriptstyle <_r} & & & & \uparrow{\scriptstyle <_l} \\
 & & \mathrm{DirAssi} & & & & \mathrm{InvAssi}
\end{array}$$

Mit Hilfe von (5.1o2) kann man die Übereinstimmung auf einem größeren Teil von (5.55) beweisen, der die abgeleiteten exakten Paare enthält. Darauf gehen wir nicht näher ein.

5.1o5. Wir haben damit jedem exakten Paar (i;j,k) von A (also auch $i \varepsilon \underline{A}$) ein Diagramm (5.1o4) zugeordnet, das wir mit SD(i;j,k) bezeichnen (Spektrales Diagramm) und dessen Zeilen exakt sind. In der Mittelspalte von SD(i;j,k) steht die spektrale Folge SF(i;j,k). Jeder Morphismus (f,g):(i;j,k) $\longrightarrow$ (i';j',k') von exakten Paaren induziert einen Morphismus SD(f,g):SD(i;j,k) $\longrightarrow$ SD(i';j',k') [1]), so daß in der Mittelspalte der zu dem Prämorphismus g:SF(i;j,k) $\longrightarrow$ SF(i';j',k') gehörige Morphismus SF(f,g) steht. Sind (f,g) und $(\bar{f},\bar{g})$ zueinander homotop, so ist SD(f,g) = SD$(\bar{f},\bar{g})$. f leistet keinen Beitrag zu SD(f,g) [2]). SD ist ein kovarianter Funktor.

---

[1]) Als Morphismus von Spektralen Diagrammen bezeichnen wir eine Familie von Morphismen der Ecken des einen Diagramms in die entsprechenden Ecken des anderen Diagramms, so daß das Gesamtdiagramm kommutativ ist und in der Mittelspalte ein Morphismus von Spektralen Folgen steht.

[2]) Das folgt aus der Homotopieeigenschaft. Es wird aber auch im Beweis von 5.1o3. klar, daß f keinen Beitrag leistet, da es keinen Beitrag zur Mittelspalte leistet, wie wir vorher gesehen hatten.

6. c-KATEGORIEN UND δ-FUNKTOREN

6.1. $\underline{C}$ sei eine Kategorie. Wir betrachten die Kategorie $\underline{PC}$ der Paare über $\underline{C}$ mit:

(D1) Objekte von $\underline{PC}$ sind die Diagramme $\cdot \xrightarrow{g} \cdot \xrightarrow{h} \cdot$ von $\underline{C}$ (für $\cdot \xrightarrow{g} \cdot \xrightarrow{h} \cdot$ schreiben wir (g,h)),

(D2) Morphismen von $\underline{PC}$ sind die kommutativen Diagramme

(6.2)
$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot & \xrightarrow{h} & \cdot \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \cdot & \xrightarrow{g'} & \cdot & \xrightarrow{h'} & \cdot \end{array}$$
(wir schreiben $(a,b,c):(g,h) \longrightarrow (g',h')$,

wobei wie üblich strenger $((g,h),g',h'),(a,b,c))$ für (a,b,c) zu setzen ist),

(D3) Die Komposition ist die von $\underline{C}$ (komponentenweise).

6.3. Eine Teilkategorie $\underline{P}$ von $\underline{PC}$ heißt eine c-Struktur auf $\underline{C}$. $(\underline{C},\underline{P})$ oder einfach $\underline{C}$ heißt eine c-Kategorie. Ist $\underline{C}$ eine c-Kategorie mit c-Struktur $\underline{P}$, so ist $\underline{C}^*$ eine c-Kategorie mit c-Struktur $\underline{P}^*$.

c-Kategorien wurden in |19|(iv.8.) eigeführt (c = couple). |19| betrachten nur volle Teilkategorien $\underline{P}$ von $\underline{PC}$. Wir werden für die Anwendung auf stabile Kategorien auch solche $\underline{P}$ betrachten, die nicht volle Teilkategorie von $\underline{PC}$ sind.

Von |25| übernehmen wir die Bezeichnung $g\underline{P}h$ für $(g,h)\varepsilon|\underline{P}|$.

6.4. Beispiel: Die volle Teilkategorie $\underline{P}$ von $\underline{PC}$ mit $|\underline{P}| := \{(g,h)|hg=0\}$ in einer Kategorie $\underline{C}$ mit Nullmorphismen (2.1.).

6.5. Beispiel: $\underline{C}$ sei eine Kategorie mit Nullmorphismen. $\underline{P}$ sei die volle Teilkategorie von $\underline{PC}$, deren Objekte die kurz exakten Folgen $\cdot \xrightarrow{g} \cdot \xrightarrow{h} \cdot$ von $\underline{C}$ sind (2.9.).

6.6. Die c-Struktur von 6.5. erscheint bei der Definition von quasiexakten Kategorien (2.14.): $\underline{C}$ mit $\underline{P}$ von 6.5. heißt quasiexakt, wenn zu $f:A \longrightarrow B$ ein Diagramm $\cdot \xrightarrow{k} A \xrightarrow{b} \cdot \xrightarrow{\bar{f}} \cdot \xrightarrow{b'} B \xrightarrow{k'} \cdot$ mit

(A1) $bb\bar{f}b = f$,

(A3) $k\underline{P}b$ und $b'\underline{P}k'$,

(A2) $\bar{f}$ ist eine Äquivalenz (im nichtgraduierten Fall läßt man f meist fort).

Die folgenden Beispiele sind für sich trivial, interessieren uns jedoch im Zusammenhang mit c-Funktoren (6.11.-6.15) und δ-Funktoren (6.16.-6.24.).

6.7. Beispiel: Top sei die Kategorie der topologischen Räume, P voll mit Objekten $A \subset X \subset (X,A)$ für $A,X \in |\mathrm{Top}|$ mit $A \subset X$ (Teilraum).

6.8. Beispiel: wie 6.7. mit $(A,B) \subset (X,B) \subset (X,A)$ für $A,B,X \in |\mathrm{Top}|$ mit $B \subset A \subset X$.

6.9. Beispiel: PuTop sei die Kategorie der punktierten topologischen Räume, P voll mit Objekten $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Cf$ für $f \in \mathrm{PuTop}$, wo $Y \longrightarrow Cf$ die Einbettung von Y in den reduzierten Abbildungskegel Cf von f ist (z.B. |27|). PuTop ist natürlich so zu verstehen, daß die f den Grundpunkt erhalten.
Dieselbe Konstruktion kann man natürlich in Top mit nicht reduziertem Kegel betrachten.

6.10. Beispiel: T sei die Kategorie der (punktierten) CW-Komplexe und (punktierten) Homotopieklassen von stetigen Abbildungen, P voll mit Objekten $A \subset X \longrightarrow X/A$ (A Teilkomplex von X, $A \subset X$ Homotopieklasse der Einbettung und $X \longrightarrow X/A$ Homotopieklasse der Identifizierung von A zu einem Punkt).

6.11. C, C' seien c-Kategorien. Ein Funktor $\alpha: C \longrightarrow C'$ heißt ein c-Funktor, wenn α (in kanonischer Weise) einen Funktor $P \longrightarrow P'$ der c-Strukturen definiert, d.h. wenn gilt (kovarianter Fall):

(cF1) $gPh \Rightarrow (\alpha g)P'(\alpha h)$ und
(cF2) $(a,b,c) \in P \Rightarrow (\alpha a, \alpha b, \alpha c) \in P'$.

Es istklar, daß ein kommutatives Diagramm
(6.12)
$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{array}$$
von C bei jedem Funktor $\alpha: C \longrightarrow C'$ in ein kommutatives Diagramm von C' übergeht, jedoch braucht α(6.12) nicht in P' zu liegen, selbst dann nicht, wenn die Zeilen Objekte von P' sind.

6.13. Beispiel: C, C' seien abelsche (quasiexakte) Kategorien, P wie in 6.5. (kurz exakte). Bekanntlich nennt man in der homologischen Algebra einen Funktor, der c-Funktor ist für P' mit exakten Folgen

(6.14) $N \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow N$ exakt (2.15.),
(6.15) $\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow N$ rechts exakt,
(6.16) $N \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$ links exakt,
(6.17) $\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$ halb exakt (z.B. |25| xii.7.).

6.18. Beispiel: T, P wie in 6.1o., C' sei abelsch (quasiexakt) und P' voll mit exakten Folgen $\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$ (6.17). c-Funktoren sind die halbexakten Funktoren im Sinne von |13| ($A \subset X \longrightarrow X/A$ geht in eine exak-

te Folge $\alpha A \longrightarrow \alpha X \longrightarrow \alpha(X/A)$ bzw. $\alpha(X/A) \longrightarrow \alpha X \longrightarrow \alpha A$ über).

6.19. Beispiel: Top, P wie in 6.7.. C' sei die Kategorie der Kettenkomplexe über abelschen Gruppen mit P' voll mit zerfallenden (split) kurz exakten Folgen $N \longrightarrow A \longrightarrow A\oplus B \longrightarrow B \longrightarrow N$. $X \longrightarrow SX$, $f \longrightarrow Sf$ (singulärer Komplex (z.B. |19|vii.2., Sf ist dort mit f_S bezeichnet)) ist ein c-Funktor: $A\subset X\subset(X,A)$ geht in eine zerfallende exakte Folge $N \longrightarrow SA \longrightarrow SX \longrightarrow S(X,A) \longrightarrow N$ über (l.c.p. 187; $S(X,A) := SX/SA$).

6.20. C sei eine c-Kategorie und A eine graduierte abelsche Kategorie. Ein kovarianter δ-Funktor $\beta: C \longrightarrow A$ vom Grade t ist gegeben durch (|29|vi.8.):

(D1) Einen kovarianten Funktor (von graduierten Kategorien(C ist trivial graduiert)) $\beta_1 =: \beta: C \longrightarrow A$,

(D2) Eine Abbildung $\beta_2 =: \beta: |P| \longrightarrow A$ mit:

(δF1) Für $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ in P ist $\beta(g,h) \in A_t(\beta C, \beta A)$,

(δF2)

(6.21)
$$\begin{array}{ccc} \beta A & \xleftarrow{\beta(g,h)} & \beta C \\ & {\scriptstyle \beta g} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \beta h} & \\ & \beta B & \end{array}$$
ist exakt für jedes $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ in P,

(δF3) für jeden Morphismus $(a,b,c) \in P$ von $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ in $A' \xrightarrow{g'} B' \xrightarrow{h'} C'$ ist

(6.22)
$$\begin{array}{ccc} \beta A & \xleftarrow{\beta(g,h)} & \beta C \\ {\scriptstyle \beta a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta c} \\ \beta A' & \xleftarrow{\beta(g',h')} & \beta C' \end{array}$$
kommutativ.

Man könnte die Definition auch mit den primitiven Begriffen Funktor und Natürliche Transformation beschreiben, jedoch würde dabei die einfache Idee weitgehend verschleiert.
Kontravariante δ-Funktoren definiert man entsprechend. Bei Definition durch Dualisierung von A erhält man kontravariante δ-Funktoren vom Grade -t. Bei Dualisierung von C und A erhält man kovariante δ-Funktoren vom Grade -t. Wir machen keine Voraussetzung über t. In den Anwendungen ist meist t=-1 (bei Cohomologie je nach Auffassung auch +1).
Wenn bei der Einführung eines δ-Funktors besonderer Wert auf P gelegt wird, sagen wir genauer, daß $\beta: (C,P) \longrightarrow A$ ein δ-Funktor sei.

6.23. Ist $\beta': C \longrightarrow A$ ein zweiter kovarianter δ-Funktor vom gleichen Grade t, so heißt eine natürliche Transformation $\vartheta: \beta_1 \longrightarrow \beta'_1$ eine natürliche Transformation von δ-Funktoren, wenn für $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ in P das

Diagramm (6.24)

$$\begin{array}{ccc} \beta A & \xleftarrow{\beta(g,h)} & \beta C \\ {\scriptstyle \partial A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial C} \\ \beta' A & \xleftarrow{\beta'(g,h)} & \beta' C \end{array}$$

kommutativ ist.

Entsprechend definiert man natürliche Transformationen von kontravarianten δ-Funktoren.

6.25. Beispiel: $\underline{C}$ sei die Kategorie der Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie $\underline{A}$, $\underline{P}$ wie in 6.5.(kurz exakt). Die Bildung der Homologie ist ein kovarianter δ-Funktor.

6.26. Beispiel: $\underline{A}$ sei abelsch, $\underline{P}$ wie in 6.5.(kurz exakt), $\underline{A}'$ abelsch. Eine exakt zusammenhängende Folge von Funktoren T_n: $\underline{A} \longrightarrow \underline{A}'$ (|1o|iii.4.+ Exaktheit;|12|) ist gerade ein δ-Funktor $T:\underline{A} \longrightarrow \underline{A}'^{\mathbb{Z}}$.

6.27. Beispiel: Für $\underline{Top}$ und $\underline{P}$ wie in 6.7. oder 6.8. , $\underline{A} = \underline{Mod}^{\mathbb{Z}}$ ($\underline{Mod}$:= oduln über einem Ring) ist jede Homologietheorie (Cohomologie-) (|19|i.3) ein kovarianter (kontravarianter) δ-Funktor.

6.28. Die allgemeinen Homologiefunktoren von |33| sind kovariante δ-Funktoren für $\underline{Top}$ und $\underline{P}$ wie in 6.7., 6.8., $\underline{PuTop}$ und $\underline{P}$ wie in 6.9. oder $\underline{T}$, $\underline{P}$ wie in 6.1o. (mit der Bedingung, daß $\beta(g,h)$ durch die Einhängung zerlegbar ist).

6.29. Für ein Beispiel von natürlichen Transformationen von δ-Funktoren verweisen wir auf |19|iii.1o.1.(Eindeutigkeitssatz für Triangulierbare Räume).

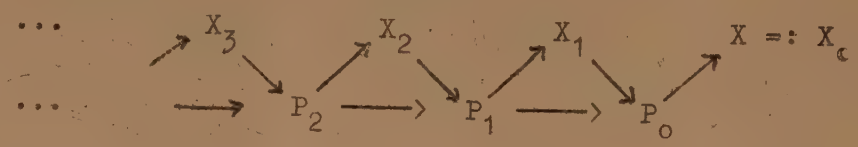
7. HOMOLOGISCHE ALGEBRA

7.1. Wir erinnern an die Konstruktion von DOLD in |11|:
$\underline{A}$, $\underline{B}$ seien abelsche Kategorien. Wir fassen $\underline{A}$ als c-Kategorie auf mit der c-Struktur (6.5) der kurzen exakten Folgen. $T:\underline{A} \longrightarrow \underline{B}^{\mathbb{Z}}$ sei ein kovarianter additiver δ-Funktor (exakt zusammenhängende Folge von kovarianten additiven Funktoren $T_n:\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, $n\varepsilon\mathbb{Z}$). Sei $X\varepsilon|\underline{A}|$. Wir wählen eine projektive Auflösung (deren Existenz wir annehmen)

(7.2) $\quad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow X \longrightarrow N$

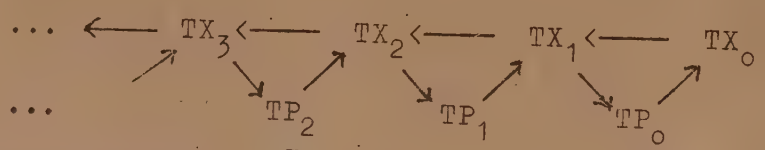
von X und zerlegen $P_i \longrightarrow P_{i-1}$ über $X_i := Bil(P_i \longrightarrow P_{i-1}) = Ker(P_{i-1} \longrightarrow P_{i-2})$ für $i>1$ bzw. $Bil(P_1 \longrightarrow P_o) = Ker(P_o \longrightarrow X) =: X_1$:

(7.3)



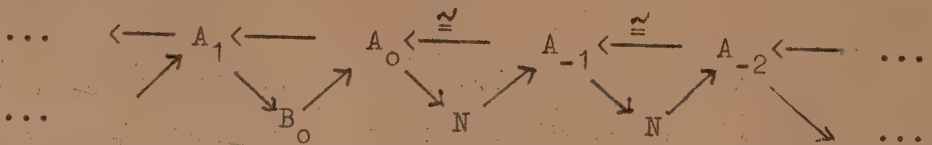
Offenbar sind die Teile $X_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow X_{i-1}$ des Diagramms (7.3) kurz exakt. Anwendung von T auf (7.3) ergibt unter Fortlassung der $T(P_i \longrightarrow P_{i-1})$ eine Folge

(7.4)



von exakten Dreiecken in $\underline{B}^{\mathbb{Z}}$. Wir setzen $A_n := TX_n$, $B_n := TP_n$ und ergänzen (7.4) nach rechts

(7.5)



zu einem exakten Paar in $\underline{B}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = (\underline{B}^{\mathbb{Z}})^{\mathbb{Z}}$. A_{-1} ist im wesentlichen gleich A_o, man muß nur um (7.5) zu einem exakten Paar

(7.6)

von $\underline{B}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ zusammenfassen zu können eine Indexverschiebung zwischen $A_o = (A_{n,o}|n\varepsilon\mathbb{Z})$ und A_{-1} anbringen, so daß die Äquivalenz $A_o \longleftarrow A_{-1}$ denselben Grad in $\underline{B}^{\mathbb{Z}}$ hat wie die $TX_i \longleftarrow TX_{i-1}$. Die A_o A_{-1} N bekommen den Grad o. Dann iteriert man.

Aus dem exakten Paar (7.5,7.6) erhält man ein spektrales Diagramm SD(i;j,k). Das spektrale Diagramm ist funktoriell von X abhängig: Die projektive Auflösung und das exakte Paar sind durch X zwar nicht eindeutig bestimmt. Die Mehrdeutigkeit geht jedoch beim Übergang zu dem spektralen Diagramm wieder verloren. Wesentlich zum Beweis ist der bekannte

(7.7)SATZ(|1o|vProp1.1;|25|iii6.1 und ix4.3): Ist

(7.8) $$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_o \xrightarrow{\varepsilon} X$$

ein projektiver linker Komplex über X,

(7.9) $$\ldots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{\partial'_2} Y_1 \xrightarrow{\partial'_1} Y_o \xrightarrow{\varepsilon'} X'$$

ein azyklischer linker Komplex über X' und $f:X \longrightarrow X'$ ein Morphismus, so existiert eine Fortsetzung $F = (F_i \mid \mathbb{Z} \ni i \geq o)$ von f zu einem kommutativen Diagramm

(7.1o)
$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_o & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow F_2 & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_o & & \downarrow f \\ \ldots & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Y_o & \longrightarrow & X' \end{array}$$

und je zwei solche Fortsetzungen F, $\bar{F}$ sind kettenhomotop (d.h. es gibt Morphismen $\phi_i : P_i \longrightarrow Y_{i+1}$ mit $\partial'_1\phi_o = F_o - \bar{F}_o$ und $\phi_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}\phi_n = F_n - \bar{F}_n$ für $n>o$:

(7.11)
$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_o & \xrightarrow{\varepsilon} & X & & \\ & \swarrow^{\phi_2} & \downarrow F_2-\bar{F}_2 & \swarrow^{\phi_1} & \downarrow F_1-\bar{F}_1 & \swarrow^{\phi_o} & \downarrow F_o-\bar{F}_o & & \downarrow f & & \\ \ldots & \longrightarrow & Y_2 & \xrightarrow[\partial'_2]{} & Y_1 & \xrightarrow[\partial'_1]{} & Y_o & \xrightarrow[\varepsilon']{} & X' &). & \end{array}$$

Wir gehen auf den Beweis nicht ein, da wir ihn anschließend allgemeiner führen werden. Zur verwendeten Terminologie sei erinnert:

Ein Diagramm

(7.12) $$\ldots \longrightarrow Z_2 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow Z_o \longrightarrow X$$

in einer abelschen Kategorie heißt

(7.13) ein linker Komplex über X, wenn die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen die O ist,

(7.14) ein projektiver linker Komplex über X, wenn außerdem die Z_n sämtlich projektiv [1]) sind,

(7.15) ein azyklischer linker Komplex, wenn

$$\ldots \longrightarrow Z_2 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow Z_o \longrightarrow X \longrightarrow N$$

exakt ist und

(7.16) eine projektive Auflösung von X, wenn das Diagramm ein projektiver azyklischer linker Komplex ist.

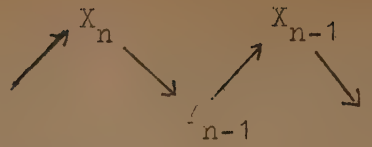
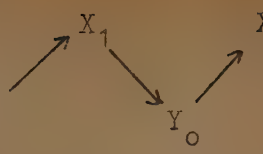
Wir verallgemeinern das Verfahren von 7.1.:

7.17. C sei eine c-Kategorie mit c-Struktur P, B sei graduiert abelsch und $\beta: C \longrightarrow B$ ein kovarianter δ-Funktor vom Grade r.

Wendet man β auf ein Diagramm

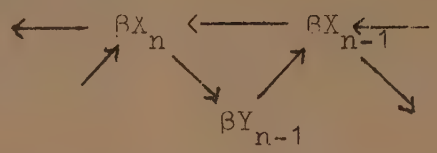
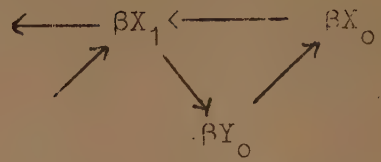
---

[1]) P ist projektiv, genau wenn für kurz exakte $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ die Folge $N \longrightarrow \hom(P,A) \longrightarrow \hom(P,B) \longrightarrow \hom(P,C) \longrightarrow N$ exakt ist. Das ist zwar nicht die übliche Definition projektiver Objekte, aber (in abelschen Kategorien) äquivalent zu der üblichen Definition (|25|iThm6.3,ixThm4.2). Wir benötigen gerade diese Eigenschaft

(7.18) ...  ... 

in $\underline{C}$ an, dessen "Tüten" . . in $\underline{P}$ sind, so erhält man eine zu-

sammenhängende Folge

(7.19) ...  ... 

von exakten Dreiecken in $\underline{B}$. Wir setzen $\beta X_n =: A_n$, $\beta Y_n =: B_n$. Um ein exaktes Paar (in $\underline{B}^{\mathbb{Z}}$) zu erhalten, ergänzen wir die Folge nach rechts durch

(7.2o)

wobei die $A_{-l} \longleftarrow A_{-l-1}$ Äquivalenzen vom Grade r seien (3.8.) und die Morphismen in und aus N den Grad o haben sollen. In den Anwendungen ist meist schon $\underline{B} = \underline{B'}^{\mathbb{Z}}$ für eine abelsche Kategorie $\underline{B'}$, die Fortsetzung (7.2o) geschieht dann durch Wiederholung von $A_o = \beta X_o$ mit verschobenen Indizes. Mit $A_l := N$ für $l<o$ und $A := (A_n | n\varepsilon\mathbb{Z})$, $B := (B_n | n\varepsilon\mathbb{Z})$ ist dann (7.19,7.2o) ein exaktes Paar $A \xleftarrow{i} A$, $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} A$

(7.21)

von $\underline{B}^{\mathbb{Z}}$, in dem Falle $\underline{B} = \underline{B'}^{\mathbb{Z}}$ also ein exaktes Paar von $(\underline{B'}^{\mathbb{Z}})^{\mathbb{Z}} = \underline{B'}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$. Daraus erhält man ein spektrales Diagramm SD(i;j,k).

7.22. Das Diagramm (7.18) entspricht in dieser allgemeineren Betrachtung dem speziellen Diagramm (7.3). Wir bezeichnen daher (7.18) als eine links $\underline{P}$-Auflösung von X. (7.3) ist links $\underline{P}$-Auflösung, wenn $\underline{P}$ die c-Struktur der kurz exakten Diagramme . ——> P ——> . mit projektivem P in einer abelschen Kategorie ist. In der üblichen Terminologie ist natürlich (7.2) die projektive Auflösung. (7.2) und (7.3) enthalten jedoch dieselbe Information und wir gewannen (7.3) aus (7.2) durch Einfügung der X_i, $i\geq 1$. In (7.18) müssen wir uns jedoch hüten, die X_i, $i\geq 1$ zu streichen, da man sie ohne weitere Voraussetzungen über $\underline{P}$ nicht wiederfinden kann.

Wie üblich wird die Existenz einer links $\underline{P}$-Auflösung für jedes $X\varepsilon|\underline{C}|$ gesichert durch die Annahme, daß $\underline{P}$ genügend reich sei:

DEFINITION: $\underline{P}$ heißt genügend reich, wenn für jedes $X\varepsilon|\underline{C}|$ ein

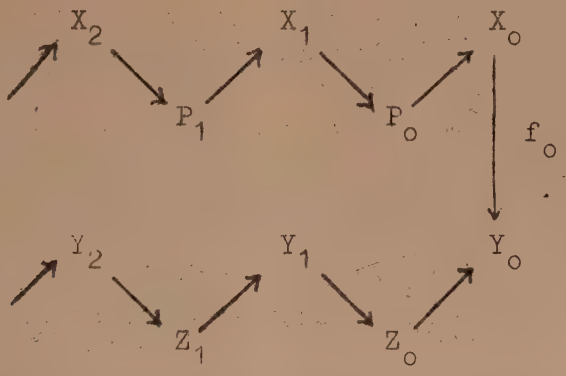
$(. \longrightarrow . \longrightarrow X)\varepsilon|\underline{P}|$ existiert.

Das entspricht der in abelschen Kategorien üblichen Bedingung "Für X existiert eine Surjektion $P \xrightarrow{h} X$ mit projektivem P", da man im abelschen Fall dann zu einer kurz exakten Folge $.\xrightarrow{kerh}P \xrightarrow{h} X$ ergänzen kann.

7.23. Bei genügend reicher c-Struktur ist damit jedem X mindestens ein spektrales Diagramm zugeordnet, das in dieser Allgemeinheit natürlich - auch nach Auswahl - nicht funktoriell von X abhängt.
Kann man trotzdem Informationen über X erlangen (Konvergenz des spektralen Diagramms (der spektralen Folge)), so braucht man sich natürlich für die funktoriellen Eigenschaften nicht unbedingt zu interessieren. Häufig benötigt man den Satz (7.7) für Konvergenzuntersuchungen (11) und erzielt damit auch die Funktoreigenschaften. Wir verallgemeinern (7.7) soweit, daß der Satz auf den Fall 7.1.(DOLD) und auf die ADAMS'sche Spektralfolge (8 - 1o) und auf unsere Konvergenzuntersuchungen in 11 anwendbar ist. Natürlich können wir auch hier nicht auf die X_i, $i \geq 1$ verzichten.

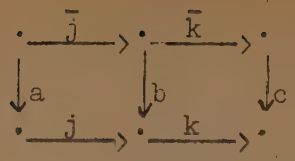
7.24. $\underline{C}$ sei jetzt eine additive Kategorie[1]) mit c-Struktur $\underline{P}$. $P \in |\underline{C}|$ heißt $\underline{P}$-projektiv, wenn
(PRO) für $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C$ in $\underline{P}$ stets $N \longrightarrow \underline{C}(P,A) \xrightarrow{j_*} \underline{C}(P,B) \xrightarrow{k_*} \underline{C}(P,C) \to N$ exakt ist.
Ist $\underline{C}$ eine abelsche Kategorie und wählt man $\underline{P}$ kurz exakt, so erhält man die üblichen projektiven Objekte in einer abelschen Kategorie (Fußnote zu (7.14)).

7.25. $\underline{C}$ sei weiter additiv. Wir verallgemeiner Satz (7.7):
$\underline{P}$, $\bar{\underline{P}}$ seien zwei c-Strukturen auf $\underline{C}$. $\underline{P}$ sei Teilkategorie von $\bar{\underline{P}}$ und für $j \bar{\underline{P}} k$ gelte $kj = 0$. Für die Anwendung (7.7) denke man sich $\underline{P}$ als kurz exakte Folgen, $\bar{\underline{P}}$ als Diagramme $\cdot \xrightarrow{j} \cdot \xrightarrow{k} \cdot$ mit $kj = 0$.
Wir betrachten ein Diagramm

(7.26)


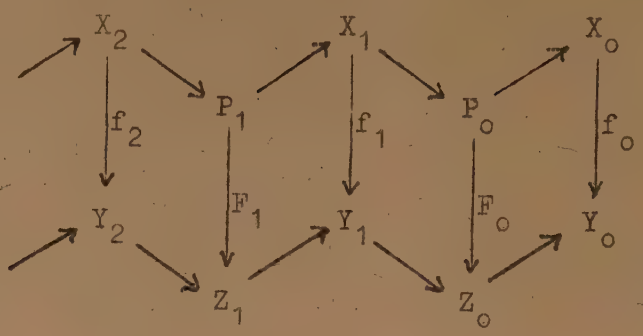
,

dessen obere Zeile links $\bar{\underline{P}}$-Auflösung von X_o und dessen untere Zeile links $\underline{P}$-Auflösung von Y_o sei. Außerdem seien die P_n $\underline{P}$-projektiv. Für den angegebenen Spezialfall ist das offenbar die Situation von (7.7).
Behauptet wird:
(1) Existiert zu jedem kommutativen Diagramm $\cdot \xrightarrow{\bar{j}} \cdot \xrightarrow{\bar{k}} \cdot$ mit $b \downarrow$, $\downarrow c$, $\cdot \xrightarrow{j} \cdot \xrightarrow{k} \cdot$ mit oberer Zeile in $\bar{\underline{P}}$ und unterer Zeile in $\underline{P}$ ein Morphismus



von $\bar{\underline{P}}$, so existiert eine Fortsetzung von f_o zu einem kommutativen Diagramm

(7.29) ...



,

dessen Doppeltüten

Morphismen von $\bar{\underline{P}}$ sind.

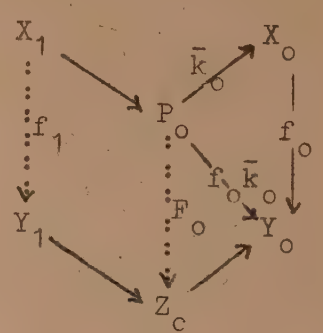
(2) Je zwei Fortsetzungen von f_o sind kettenhomotop.

Mit (2) ist die der Kettenhomotopie in (7.7) entsprechende Eigenschaft gemeint, die wir unten zu Beginn des Beweises von (2) mit Einführung der notwendigen Bezeichnungen näher erläutern.

Zum Beweis von (1) kommt man mit schwächeren Voraussetzungen aus: $\underline{C}$ sei irgendeine Kategorie mit c-Strukturen $\underline{P}$, $\bar{\underline{P}}$, so daß $\underline{P}$ Teilkategorie von $\bar{\underline{P}}$ ist. Die obere Zeile von (7.26) sei links $\bar{\underline{P}}$-Auflösung, die untere links $\underline{P}$-Auflösung und für die P_n sei $\underline{C}(P_n,B) \xrightarrow{k_*} \underline{C}(P_n,C)$ surjektiv, falls nur $(A \longrightarrow B \xrightarrow{k} C) \varepsilon |\underline{P}|$ ist. Dann gilt (1) genauso, wie wir sofort beweisen.
Für die Formulierung von (2) benötigt man natürlich, daß $\underline{C}$ eine additive Kategorie ist.

Beweis von 7.25.:
(1) Wir gehen aus von dem ausgezogenen Diagramm

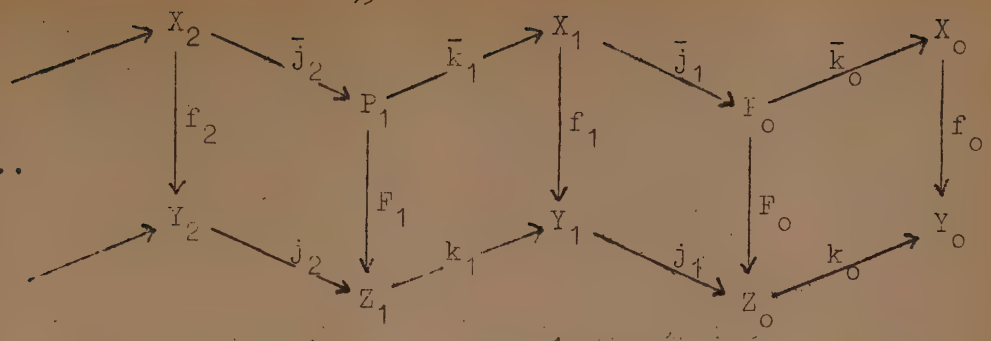
(7.30)



F_o mit $k_o F_o = k_{o*} F_o = f_o \bar{k}_o$ existiert, da $k_{o*}: \underline{C}(P_o,Z_o) \longrightarrow \underline{C}(P_o,Y_o)$ surjektiv ist, f_1 existiert nach Voraussetzung (7.27,7.28). Mit f_1 statt f_o setzt man das Verfahren fort.

(2) Wir bezeichnen

(7.31)



und nehmen an, daß das Diagramm kommutativ ist[1]). $(F'_n, f'_{n+1} | n \geq o)$ sei eine zweite Familie von Morphismen, die statt $(F_n, f_{n+1} | n)$ in (7.31) eingetragen, zusammen mit f_o ebenfalls ein kommutatives Diagramm ergibt. Ferner sei $\partial_n := j_n k_n$, $\bar{\partial}_n := \bar{j}_n \bar{k}_n$, $n>o$. Die Behauptung soll nach Definition bedeuten: Es existiert eine Familie von Morphismen $\phi_n : P_n \longrightarrow Z_{n+1}$, $n \geq o$ mit

(7.32) $\partial_1 \phi_o = F_o - F'_o$ und $\partial_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}\bar{\partial}_n = F_n - F'_n$ für $n \geq 1$.

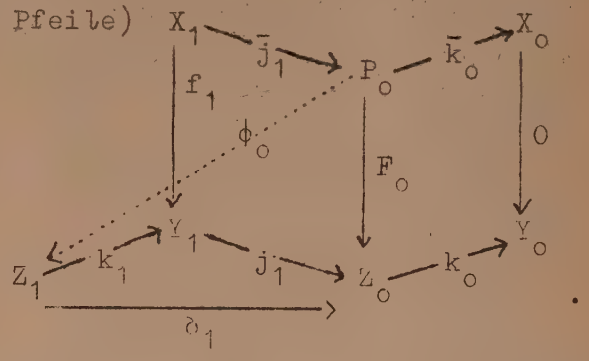
Wir zeigen: Ist (7.31) kommutativ mit $f_o = 0$, so existieren $\phi_n : P_n \longrightarrow Z_{n+1}$ mit

(7.33) $\partial_1 \phi_o = F_o$ und $\partial_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}\bar{\partial}_n = F_n$, $n \geq 1$.

Daraus erhält man sofort die allgemeinere Behauptung.

Beweis: Wir gehen aus von (ausgezogene Pfeile)

(7.34)



Es ist $k_{o*}F_o = k_o F_o = 0\bar{k}_o = 0$. Da mit $N \longrightarrow \underline{C}(P_o, Y_1) \longrightarrow \underline{C}(P_o, Z_o) \longrightarrow \underline{C}(P_o, Y_o)$ und $\underline{C}(P_o, Z_1) \longrightarrow \underline{C}(P_o, Y_1) \longrightarrow N$ auch $\underline{C}(P_o, Z_1) \xrightarrow{\partial_{1*}} \underline{C}(P_o, Z_o) \xrightarrow{k_{o*}} \underline{C}(P_o, Y_o)$ exakt ist, existiert $\phi_o \varepsilon \underline{C}(P_o, Z_1)$ mit $\partial_1 \phi_o = \partial_{1*}\phi_o = F_o$. Dann sei ϕ bis zu $\phi_n : P_n \longrightarrow Z_{n+1}$ konstruiert mit

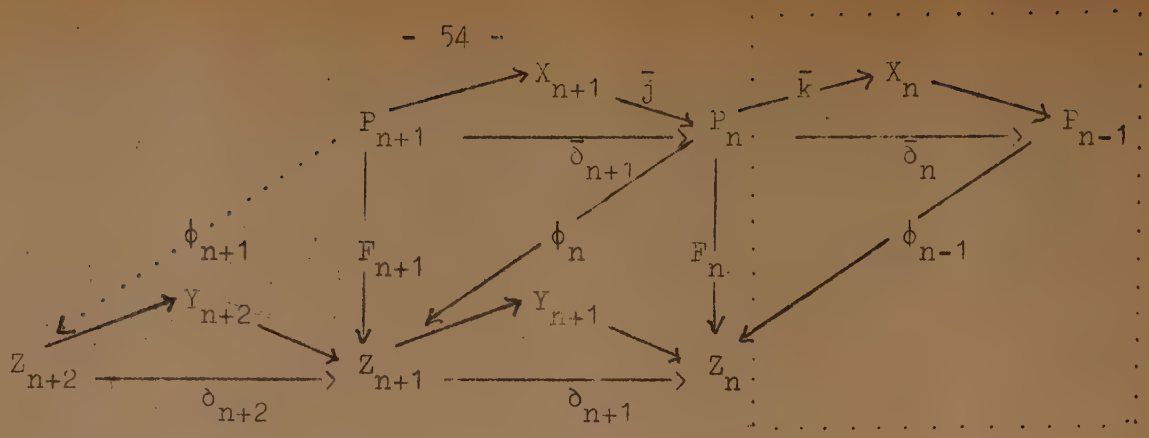
$\partial_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}\bar{\partial}_n = F_n$ (bzw. $\partial_1 \phi_o = F_o$). Wir gehen aus von (ausgezogene Pfeile) dem auf der nächsten Seite folgenden Diagramm (7.35), wobei für $n = o$ der gestrichelt eingerahmte Teil des Diagramms fortzulassen ist.

Für $n = o$ ist $F_o \bar{\partial}_1 = \partial_1 \phi_o \bar{\partial}_1$, für $n > o$ ist $\bar{\partial}_n \bar{\partial}_{n+1} = 0$, da bereits $\bar{k}_n \bar{j}_{n+1} = 0$ ist nach der Voraussetzung über $\underline{P}$. Dann ist $\partial_{n+1} F_{n+1} = jkF = jfk$ (7.31) $= F\bar{j}\bar{k}$ (7.31) $= F_n \bar{\partial}_{n+1} = (\partial_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}\bar{\partial}_n)\bar{\partial}_{n+1} = \partial_{n+1}\phi_n \bar{\partial}_{n+1}$.

---

[1]) Die Familie $(F_n, f_{n+1} | n \geq o)$ braucht nicht durch den Konstruktionsprozeß (1) gewonnen worden zu sein. Es genügt, daß (7.31) kommutativ ist. Die Voraussetzungen (7.27,7.28) werden für (2) nicht mehr benötigt.

(7.35)



Weil mit $N \longrightarrow \underline{C}(P_{n+1},Y_{n+1}) \longrightarrow \underline{C}(P_{n+1},Z_n)$,

$N \longrightarrow \underline{C}(P_{n+1},Y_{n+2}) \longrightarrow \underline{C}(P_{n+1},Z_{n+1}) \longrightarrow \underline{C}(P_{n+1},Y_{n+1}) \longrightarrow N$ und $\underline{C}(P_{n+1},Z_{n+2}) \longrightarrow \underline{C}(P_{n+1},Y_{n+2}) \longrightarrow N$ auch $\underline{C}(P_{n+1},Z_{n+2}) \xrightarrow{\delta_{n+2}*} \underline{C}(P_{n+1},Z_{n+1}) \xrightarrow{\delta_{n+1}*} \underline{C}(P_{n+1},Z_n)$ exakt ist, hat $F_{n+1} - \phi_n\bar{\delta}_{n+1}$ ein Urbild $\phi_{n+1} \varepsilon \underline{C}(P_{n+1},Z_{n+2})$ mit $\delta_{n+2}\phi_{n+1} = \delta_{n+2}\phi_{n+1} = F_{n+1} - \phi_n\bar{\delta}_{n+1}$ oder $\delta_{n+2}\phi_{n+1} + \phi_n\bar{\delta}_{n+1} = F_{n+1}$.

Damit ist 7.25. vollständig bewiesen. Der Beweis ist, wie man bemerkt hat, natürlich derselbe wie der von (7.7) an den zitierten Literaturstellen unter Reduktion auf die wirklich benötigten Voraussetzungen.

Ohne hiervon weiter Gebrauch zu machen, stellen wir fest: $j_1f_1 = F_o\bar{j}_1 = \delta_1\phi_o\bar{j}_1$ und, für $n>o$, $j_{n+1}f_{n+1} = F\bar{j} = (\delta\phi + \phi\bar{\delta})\bar{j} = \delta\phi\bar{j} + \phi\bar{j}\bar{k}\bar{j} = \delta\phi\bar{j} = j_{n+1}k_{n+1}\phi_n\bar{j}_{n+1}$, da der zweite Summand des vorletzten Ausdrucks 0 ist. Sind die j, wie z.B. im Falle 7.1.,(7.7), injektiv, so ist $f_n = k_n\phi_{n-1}\bar{j}_n$ für $n\geq 1$. Diese Bemerkung kann man verwenden, wenn man nicht nur an der Konstruktion eines spektralen Diagramms für X interessiert ist, sondern die gesamte in den abgeleiteten exakten Paaren steckende Information wünscht. Wie 7.37. beweist man dann mit (5.1o2, 5.1o4), daß die Folge der abgeleiteten exakten Paare funktoriell ist.

7.36. $\underline{C}$ sei eine additive c-Kategorie mit c-Struktur $\underline{P}$. Wir wollen erreichen, daß das spektrale Diagramm von 7.23. existiert und funktoriell ist und setzen daher über $\underline{P}$ voraus:

(PS1) $\underline{P}$ ist genügend reich (7.22.),

(PS2) $j\underline{P}k \Longrightarrow kj = 0$,

(PS3) Jedes kommutative Diagramm $\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{j'} & \cdot & \xrightarrow{k'} & \cdot \\ & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{j} & \cdot & \xrightarrow{k} & \cdot \end{array}$ mit Zeilen in $\underline{P}$ ist zu einem Morphismus $\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{\bar{j}} & \cdot & \xrightarrow{\bar{k}} & \cdot \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{j} & \cdot & \xrightarrow{k} & \cdot \end{array}$ von $\underline{P}$ ergänzbar (Wir verlangen

keine Eindeutigkeit für a. a ist eindeutig bestimmt, wenn j injektiv ist. Das braucht aber z.B. in der stabilen Homotopietheorie nicht der Fall zu sein. Man vergleiche das Beispiel im Anhang).

(PS4) Sind $\cdot \longrightarrow P \longrightarrow \cdot$ und $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ in $\underline{P}$, so ist
$N \longrightarrow \underline{C}(P,A) \longrightarrow \underline{C}(P,B) \longrightarrow \underline{C}(P,C) \longrightarrow N$ exakt,

(PS5) Ist $\cdot \longrightarrow P \longrightarrow \cdot$ in $\underline{P}$, so auch $N \longrightarrow P \xrightarrow{1} P$.

Dabei bedeutet (PS4), daß die an den Mittelstellen der Diagramme $\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \; \varepsilon \; |\underline{P}|$ vorkommenden Objekte $\underline{P}$-projektiv sind. (PS5) ist für die weiteren Betrachtungen überflüssig, es erscheint jedoch vernünftig zu verlangen, daß die Auflösungen der projektiven sofort abbrechen.

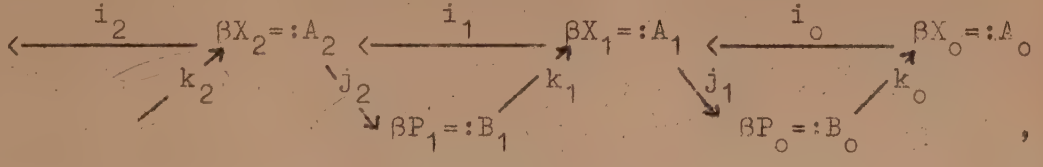
Im Falle 7.1. ist $\underline{P}$ die volle Teilkategorie von $\underline{PC}$, deren Objekte die kurz exakten Folgen mit projektiver Mittelstelle sind. (PS4) gilt hier noch allgemeiner, da B in $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ nicht projektiv zu sein braucht um eine exakte Folge $N \longrightarrow \underline{C}(P,A) \longrightarrow \underline{C}(P,B) \longrightarrow \underline{C}(P,C) \longrightarrow N$ zu erzielen. Wir gehen hierauf in 7.53. noch kurz ein.

7.37. SATZ: Unter den Voraussetzungen von 7.36. ist für jeden additiven kovarianten δ-Funktor $\beta: \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ die in 7.21.- 7.23. beschriebene Konstruktion eines spektralen Diagramms nach Auswahl ein kovarianter Funktor $\underline{C} \longrightarrow$ Spektrale Diagramme. Je zwei solche Auswahlen ergeben äquivalente Funktoren. Das spektrale Diagramm hängt funktoriell von β und natürlichen Transformationen ab.

Beweis: Wir rekapitulieren: Sei $X =: X_0 \varepsilon |\underline{C}|$. Aus (PS1) folgt die Existenz (mindestens) einer links $\underline{P}$-Auflösung

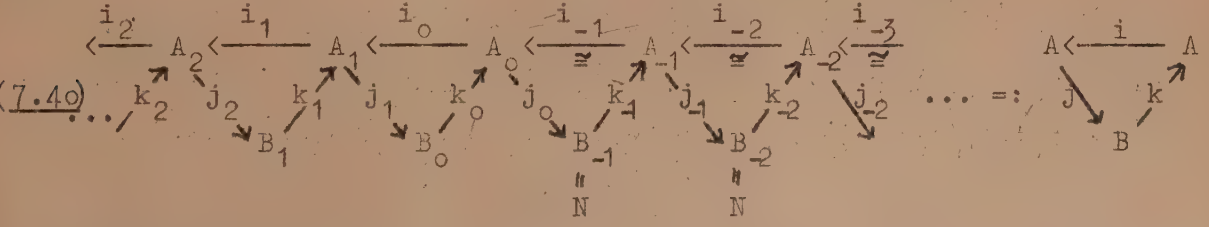
(7.38)

für X. Anwendung von β ergibt eine Folge von exakten Dreiecken

(7.39)...


,

die wir nach rechts wie in (7.2o) zu einem exakten Paar

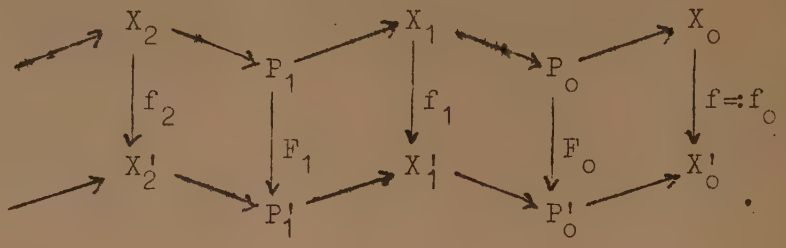
(7.4o)


vervollständigen. Daraus erhalten wir ein spektrales Diagramm SD(i;j,k). Das spektrale Diagramm hängt ab von der Wahl der Auflösung zu X und der Ergänzung nach rechts in (7.4o).

X' sei ein zweites Objekt und f:X ——> X' ein Morphismus von $\underline{C}$. Wir führen für X' dieselbe Konstruktion durch und bezeichnen wie für X nur mit einem "'" versehen.

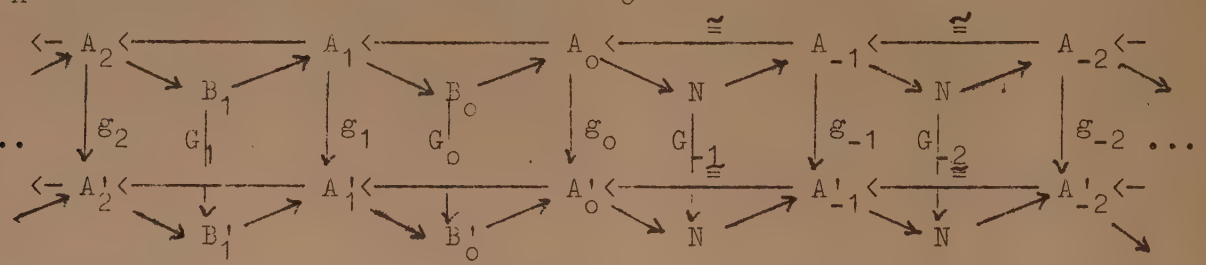
Wegen (PS3,4) erhält man aus 7.25.(1) für $\underline{P} = \bar{\underline{P}}$ ein kommutatives Diagramm

(7.41)



Nach Anwendung von β erhalten wir mit den Bezeichnungen $\beta f_n =: g_n$, $\beta F_n =: G_n$ und kanonischer Fortsetzung von g_o nach rechts

(7.42)



einen Morphismus $(G,g):(i;j,k) \longrightarrow (i';j',k')$ von exakten Paaren und nach 5.1o5. einen Morphismus $SD(G,g):SD(i;j,k) \longrightarrow SD(i';j',k')$ von spektralen Diagrammen.

Hat man eine zweite Familie von Morphismen $(\bar{F}_n, \bar{f}_{n+1} | n \geq o)$, die (7.41) kommutativ macht, so erhält man Morphismen $(\bar{G},\bar{g}):(i;j,k) \longrightarrow (i';j',k')$ und $SD(\bar{G},\bar{g}):SD(i;j,k) \longrightarrow SD(i';j',k')$. Mit (PS2,4) und 7.25.(2) existiert eine Familie von Morphismen $\phi_n : P_n \longrightarrow P'_{n+1}$ mit (vgl.7.32)

$$\partial'_1 \phi_o = F_o - \bar{F}_o \quad \text{und} \quad \partial'_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}\partial_n = F_n - \bar{F}_n \ , \ n \geq 1.$$

Da β additiv ist, gilt

$$j'_1 k'_1 \bar{\phi}_o = G_o - \bar{G}_o \quad \text{und} \quad j'_{n+1}k'_{n+1}\bar{\phi}_n + \bar{\phi}_{n-1} j_n k_n = G_n - \bar{G}_n \ , \ n \geq 1,$$

mit der Bezeichnung $\beta\phi_n =: \bar{\phi}_n$.

Trivialerweise ist $G_n = \bar{G}_n = 0$ für $n<o$, so daß die Festsetzung $\bar{\phi}_n := 0$ für $n<o$ eine Fortsetzung von $(\bar{\phi}_n | n \geq o)$ zu einer Homotopie $\bar{\phi}:(G,g) \simeq (\bar{G},\bar{g})$ liefert. Daraus folgt $SD(G,g) = SD(\bar{G},\bar{g})$ nach 5.1o3..

SD(G,g) ist also durch f und die Wahl der Auflösungen und der Ergänzungen nach rechts eindeutig bestimmt. Damit ist SD(G,g) natürlich auch durch f und die exakten Paare (i;j,k), (i';j',k') eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen für den Moment $SD(G,g) =: SD(f:i;j,k:i';j',k')$.

Für $X = X'$, $f = 1_X$ ist (7.41), wenn man oben und unten dieselben Auflösungen wählt, mit den Identitäten $F_n = 1_{P_n}$, $f_{n+1} = 1_{X_{n+1}}$, $n \geq o$ kommutativ.

In (7.42) wähle man oben und unten die gleiche Ergänzung nach rechts. Trivialerweise hat man die Identitäten $1_N = 0_N$ zur Fortsetzung nach rechts in (7.42). Daraus folgt $SD(1_X:i;j,k:i;j,k) = 1_{SD(i;j,k)}$.

Hat man Morphismen $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ und macht $(F'_n, f'_{n+1} | n \geq o)$ das für $f':X' \longrightarrow X''$ gebildete (7.41) entsprechende Diagramm kommutativ, so macht $(F'_nF_n,\ f'_{n+1}f_{n+1} | n \geq o)$ das Diagramm für $f'f$ kommutativ. Daraus folgt

$SD(f':i';j',k':i'';j'',k'')SD(f:i;j,k:i';j',k') = SD(f'f:i;j,k:i'';j'',k'')$.

Damit haben wir die Funktoreigenschaften nach Auswahl. Die behauptete Äquivalenz verschiedener Auswahlen liefert

$SD(1_X:i';j',k':i;j,k)SD(1_X:i;j,k:i';j',k') = SD(1_X:i;j,k:i;j,k) = 1_{SD(i;j,k)}$

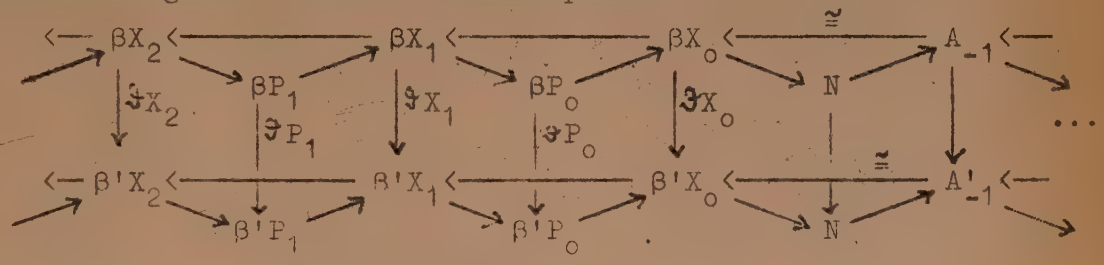
und man zeigt sofort, daß diese Äquivalenz eine Funktoräquivalenz ist.

Wir bezeichnen nach Auswahl

$SD(i;j,k) =: SD(X,\beta)$ und $SD(f:i;j,k:i';j',k') =: SD(f,\beta)$.

Ist β' ein zweiter δ-Funktor $\underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ und $\vartheta:\beta \longrightarrow \beta'$ eine natürliche Transformation von δ-Funktoren, so erhält man bei Anwendung von ϑ auf (7.38) und Fortsetzung nach rechts einen Morphismus

(7.43) ...



...

von exakten Paaren und daraus einen Morphismus

$SD(X,\vartheta):SD(X,\beta) \longrightarrow SD(X,\beta')$.

Die Funktoreigenschaften $SD(X,1_\beta) = 1_{SD(X,\beta)}$ und

$SD(X,\vartheta')SD(X,\vartheta) = SDX,\vartheta'\vartheta)$ sind trivial.

Wie üblich ist $SD(f,\beta')SD(X,\vartheta) = SD(X',\vartheta)SD(f,\beta) =: SD(f,\vartheta)$.

Damit ist SD mit Variablen (X,β) bzw. (f,ϑ) ein in beiden Variablen kovarianter Funktor.

7.44. Die vorstehenden Überlegungen bezogen sich auf einen kovarianten additiven δ-Funktor $\underline{C} \longrightarrow \underline{B}$. Das spektrale Diagramm $SD(X,\beta)$ entspringt aus einer links Auflösung von X

(7.45)

Man kann die Betrachtungen verschieden dualisieren:

(1) Dualisierung von $\underline{B}$: Man erhält für kontravariante $\beta:\underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ einen Funktor SD mit Variablen (X,β) und (f,ϑ). SD ist kontravariant in f und

kovariant in $\mathfrak{F}$. Die Konstruktion geschieht wie vorher mit links Auflösungen (7.45) in $\underline{C}$.

Wir bezeichnen in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der homologischen Algebra den Funktor SD von 7.37. (kovariantes β) mit SD_l und den durch Dualisierung von $\underline{B}$ gewonnenen Funktor (kontravariantes β) mit SD_r.

(2) Dualisierung von $\underline{C}$: Die Konstruktion bezieht sich auf kontravariante $\beta:\underline{C} \longrightarrow \underline{B}$. Man geht aus von rechts Auflösungen

(7.46) $\quad \cdots \longleftarrow X_2 \longleftarrow Q_1 \longleftarrow X_1 \longleftarrow Q_0 \longleftarrow X$.

Für die Funktoreigenschaften der Konstruktion setzt man die zu 7.36. dualen Axiome über $\underline{P}$ voraus:

(QS1) Für $X\varepsilon|\underline{C}|$ gibt es $(.\longleftarrow.\longleftarrow.)\varepsilon|\underline{P}|$ (d.h. $\underline{P}$ ist genügend co-reich),

(QS2) $k\underline{P}j \;\Longrightarrow\; jk = 0$,

(QS3) Jedes kommutative Diagramm $\begin{array}{ccc} .&\longleftarrow&.\\ \uparrow&&\uparrow\\ .&\longleftarrow&. \end{array}$ mit Zeilen in $\underline{P}$ ist zu einem Morphismus $\begin{array}{ccc} .&\longleftarrow&.\\ \uparrow&&\uparrow\\ .&\longleftarrow&. \end{array}$ von $\underline{P}$ ergänzbar,

(QS4) Sind $.\longleftarrow Q \longleftarrow.$ und $A \longleftarrow B \longleftarrow C$ in $\underline{P}$, so ist
$N \longrightarrow \underline{C}(A,Q) \longrightarrow \underline{C}(B,Q) \longrightarrow \underline{C}(C,Q) \longrightarrow N$ exakt,

(QS5) Ist $.\longleftarrow Q \longleftarrow. \;\varepsilon|\underline{P}|$, so auch $N \longleftarrow Q \overset{1}{\longleftarrow} Q$.

Wir definieren allgemeiner für eine beliebige c-Struktur $\underline{P}$ auf einer additiven Kategorie $\underline{C}$:

(7.47) $Q\varepsilon|\underline{C}|$ heißt $\underline{P}$-injektiv, wenn für $A \longleftarrow B \longleftarrow C$ in $\underline{P}$ stets
$N \longrightarrow \underline{C}(A,Q) \longrightarrow \underline{C}(B,Q) \longrightarrow \underline{C}(C,Q) \longrightarrow N$ exakt ist.

(QS4) bedeutet dann, daß die an den Mittelstellen der Diagramme $.\longleftarrow.\longleftarrow. \;\varepsilon|\underline{P}|$ vorkommenden Objekte $\underline{P}$-injektiv sind.

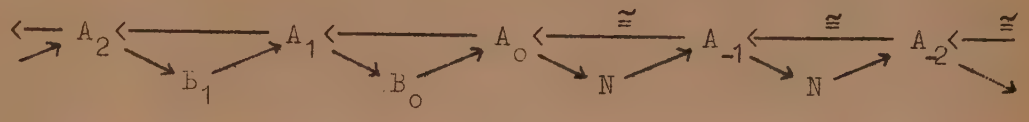
Man hat den zu 7.25. dualen Satz, dessen Formulierung wir dem Leser überlassen. In der spezielleren Form von (7.7) findet man ihn in |1o|vProp1.1a oder |25|iii8.1 für Moduln.

Daraus ergibt sich, daß wir einen Funktor von $\underline{C}$ in spektrale Diagramme erhalten mit Variablen (X,β) bzw. $(f,\mathfrak{F})$, der kontravariant in der ersten und kovariant in der zweiten Variablen ist. In Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der homologischen Algebra schreiben wir SD_l.

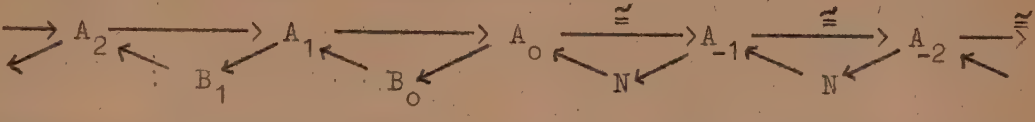
(3) Dualisierung von $\underline{C}$ und $\underline{B}$: Man erhält mit rechts Auflösungen für kovariante β einen Funktor SD_r. SD_r ist kovariant in beiden Variablen.

7.48. $SD_l(X,\beta)$ heißt links-β-deriviertes Spektraldiagramm für X, $SD_r(X,\beta)$ heißt rechts-β-deriviertes Spektraldiagramm für X. Die für SD_l bzw. SD_r benötigte Auflösung geht aus dem obigen hervor. Eine Zusammenstellung findet man in der Tabelle(8.36) in den Spalten 1, 3 und 4. Die 5te Spalte gibt, wenn man S durch C ersetzt und A vernachlässigt an, durch Dualisierung welcher der Kategorien C, B man den in diesem Paragraphen ausführlich behandelten Fall in der erten Zeile der Tabelle bekommt. Betrachtet man nur diesen Teil der Tabelle, so sind die gerade numerierten Zeilen identisch zu der darüberstehenden Zeile. Man vergleiche auch |25|p392.

7.49. Die vorstehenden Konstruktionen haben natürlich den Zweck, Informationen über das Ausgangsobjekt X zu erzielen. Man begnügt sich mit βX und stellt die Frage nach der Konvergenz des spektralen Diagramms (vgl. 5.57, besonders 5.58 und 5.61).
Das spektrale Diagramm entsteht aus einem exakten Paar spezieller Art, nämlich (7.4o)

(7.5o) ... 

im Falle von links Auflösungen (projektiv) für kovariante β und rechts Auflösungen (injektiv) für kontravariantes β - das sind die Fälle in denen B nicht dualisiert wird - beziehungsweise

(7.51) ... 

im Falle injektiver Auflösungen für kovariantes β und projektiver Auflösungen für kontravariantes β - das ist, wenn B dualisiert wird.

Wir betrachten das untere Ende

$$N \longrightarrow \mathrm{Coki} \curvearrowright \mathrm{Cobi}^{\infty} \longrightarrow B^{\infty} \longrightarrow \mathrm{Keri} \curvearrowright \mathrm{Bili}^{\infty} \longrightarrow N$$
$$\downarrow \mathrm{DirAssi} \qquad\qquad \uparrow \mathrm{InvAssi}$$

des spektralen Diagramms. Aus der speziellen Form des exakten Paares folgt:

LEMMA: (a) Im Falle (7.5o) ist $\mathrm{InvAssi} = \mathrm{Keri} \curvearrowright \mathrm{Bili}^{\infty}$,
(b) Im Falle (7.51) ist $\mathrm{DirAssi} = \mathrm{Coki} \curvearrowright \mathrm{Cobi}^{\infty}$.

Beweis für (b): Wir betrachten die Zeile von (7.51). Nach Definition (5.39) ist $\mathrm{dirassi} = \mathrm{coki} \curvearrowright \mathrm{cob}\alpha$, wobei α direkter Limes von $A \xleftarrow{i} A$ ist. Wir zeigen $\mathrm{cob}\alpha = \mathrm{cobi}^{\infty} := \bigcap_n \mathrm{cobi}^n$ oder gleichwertig $\mathrm{ker}\alpha = \bigcup_n \mathrm{keri}^n$. Die letzte Gleichung entnimmt man sofort aus dem Diagramm

(7.52)
$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{i} & A_2 & \xrightarrow{i} & A_1 & \xrightarrow{i} & A_0 & \xrightarrow{i} & A_{-1} & \xrightarrow{i} & A_{-2} & \xrightarrow{i} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \cong & \downarrow & \cong & \downarrow & \cong & \\ \cdots & \xrightarrow{\cong} & \bar{A}_2 & \xrightarrow{\cong} & \bar{A}_1 & \xrightarrow{\cong} & A_0 & \xrightarrow{\cong} & A_{-1} & \xrightarrow{\cong} & A_{-2} & \xrightarrow{\cong} & \cdots \end{array} \qquad \alpha$$

in dem offenbar α direkter Limes von i ist (5.33), wenn man irgendwelche $\bar{A}_n$ mit 3.8. ergänzt.

Beweis für (a): dual.

Die Frage nach der Konvergenz reduziert sich damit auf:
Fall(a) = (7.5o): $\mathrm{Coki} \curvearrowright \mathrm{Cobi}^{\infty} = N$?
Fall(b) = (7.51): $\mathrm{Keri} \curvearrowright \mathrm{Bili}^{\infty} = N$?

7.53. In 7.1. war zunächst eine c-Struktur (kurz exakte Folgen) P auf C gegeben, die dann durch die Forderung, daß das Mittelobjekt projektiv sein sollte eingeschränkt wurde. Die Auflösungen wurden mit der eingeschränkten Struktur P' vorgenommen. Statt von links P-Auflösung sprachen wir von projektiver P-Auflösung. Wir übernehmen dieses Verfahren, da es auch für 8, 9 allgemein genug ist. Dieses Vorgehen ist zweckmäßig, wenn man gleichzeitig injektive P-Auflösungen betrachten will und die mit den beiden Verfahren gewonnenen Spektralen Diagramme mit Satz (7.7),7.25. vergleichen will[1]).

Um die Axiome 7.36.(PS1 - PS5) für projektive und 7.44.(2)(QS1 - QS5) für injektive zu sichern, verlangen wir von P (C sei additiv):

(c1) Kommutative Diagramme $\begin{array}{ccc} \cdot & \longrightarrow & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{array}$ und $\begin{array}{ccc} \cdot & \longleftarrow & \cdot \\ \uparrow & & \uparrow \\ \cdot & \longleftarrow & \cdot \end{array}$ (ausgezogene Pfeile) mit Zeilen in P lassen sich zu einem Morphismus von P ergänzen (ausgezogene und gestrichelter Pfeil),

(c2) $N \longrightarrow X \xrightarrow{1} X$ und $N \longleftarrow X \xleftarrow{1} X$ sind in P für jedes X.

Diese Axiome sind offensichtlich selbstdual.

Die Forderungen (PS2), (QS2) sind eine Folge von (c1,2), wie man aus

$$\begin{array}{ccccc} N & \longrightarrow & C & \xrightarrow{1} & C \\ \uparrow & & \uparrow k & & \uparrow 1 \\ A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C \end{array}$$

entnimmt.

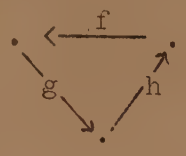
P-projektive und P-injektive sind wie in 7.24., (7.47) definiert. Projektive und injektive sind zueinander dual und man setzt voraus, daß man genügend viele projektive und injektive hat, um Auflösungen bilden zu können.

---

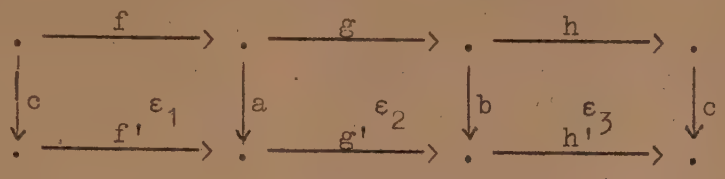
[1]) Das ist analog zu dem Vergleich der Definitionen von Ext mit projektiven Auflösungen der ersten oder injektiven Auflösungen der zweiten Variablen von Hom(-,-).

8. DIE FORMALE KONSTRUKTION DER ADAMS'SCHEN SPEKTRALFOLGE

8.1. $\underline{C}$ sei eine $\mathbb{Z}$-graduierte additive Kategorie. Ein Diagramm

(8.2)  $=: (f,g,h)$ über $\underline{C}$ mit $|f|+|g|+|h| = r$ heißt

ein graduiertes Dreieck vom Grade r über $\underline{C}$. Ein Morphismus $(a,b,c):(f,g,h) \longrightarrow (f',g',h')$ von graduierten Dreiecken ist ein Tripel von Morphismen a, b, c ε $\underline{C}$, so daß man ein Diagramm

(8.3) 

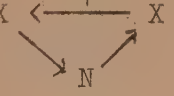
hat mit bis auf Vorzeichen ε_1, ε_2, ε_3 kommutativen Quadraten und $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = (-1)^{|a|+|b|+|c|}$. Durch Änderung der Vorzeichen der a, b, c kann man immer zwei beliebige der drei Quadrate kommutativ machen. Die Existenz eines Morphismus $(f,g,h) \longrightarrow (f',g',h')$ impliziert $|f|+|g|+|h| = |f'|+|g'|+|h'|$.

Die graduierten Dreiecke über $\underline{C}$ und ihre Morphismen bilden eine Kategorie $\Delta\underline{C}$. Ein Morphismus (a,b,c) von $\Delta\underline{C}$ ist eine Äquivalenz, genau wenn a, b, c Äquivalenzen von $\underline{C}$ sind.

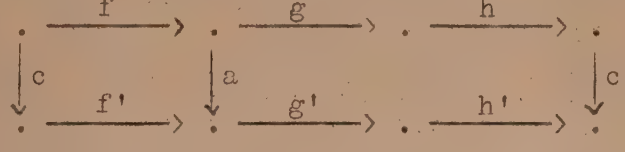
8.4. Eine Teilkategorie Δ von $\Delta\underline{C}$ heißt eine stabile Struktur auf $\underline{C}$, wenn gilt (PUPPE |28|, |30|):

(S1) Mit $(f,g,h)\varepsilon|\Delta|$ ist jedes zu (f,g,h) in $\Delta\underline{C}$ äquivalente Dreieck in Δ,

(S2) Mit $(f,g,h)\varepsilon|\Delta|$ ist $(g,h,f)\varepsilon|\Delta|$,

(S3) Für jedes $X\varepsilon|\underline{C}|$ gibt es ein Dreieck  in Δ,

(S4) Zu jedem $f\varepsilon C$ und $q\varepsilon\mathbb{Z}$ gibt es mindestens ein $(f,g,h)\varepsilon|\Delta|$ mit $|g|=q$,

(S5) Sind in dem Diagramm 

die Zeilen Dreiecke in Δ und ist das linke Quadrat kommutativ bis

auf ein Vorzeichen[1]), so existiert ein $b \in C$, so daß (a,b,c) ein Morphismus $(a,b,c):(f,g,h) \longrightarrow (f',g',h')$ in Δ ist.

Da in $\underline{C}$ Nullmorphismen vorgeschriebenen Grades zwischen je zwei Objekten existieren, kann man in (S5) das linke Quadrat mit $c = 0$, $a = 0$ kommutativ machen. Aus der geforderten Existenz einer Ergänzung b zu einem Morphismus $(a,b,c) \in \Delta$ folgt, daß die Dreiecke einer stabilen Struktur sämtlich den gleichen Grad haben. PUPPE |28| beschränkt sich von vornherein auf Dreiecke vom Grade -1. Warum wir das nicht tun, wird sofort klar werden.

Eine $\mathbb{Z}$-graduierte additive Kategorie $\underline{C}$ mit einer stabilen Struktur $\Delta \subset \Delta\underline{C}$ heißt eine stabile Kategorie. Wir bezeichnen häufig einfach $\underline{C}$ als stabile Kategorie und nennen die Dreiecke (Objekte) von Δ die stabilen Dreiecke von $\underline{C}$. Strenggenommen ist eine stabile Kategorie ein Paar $(\underline{C}, \Delta)$.

Ist $(\underline{C}, \Delta)$ eine stabile Kategorie, so auch $(\underline{C}^*, \Delta^*)$. Bei Beschränkung auf Dreiecke vom Grade -1 wäre das wegen unserer Vereinbarung über die Vorzeichenänderung der Graduierung (1.1o.) nicht der Fall: Ein Dreieck vom Grade r in $\underline{C}$ geht beim Dualisieren in ein Dreieck vom Grade -r in $\underline{C}^*$ über.
Die in |28| noch geforderte Einhängung (Suspension) ergibt sich aus (S1 - S5), wie wir in (8.1o) zeigen werden.

8.5. $\underline{C}$ sei eine stabile Kategorie. Wir erwähnen die folgenden Sätze von |28|:

(8.6)SATZ: Ist $X \xleftarrow{f} Z$ mit $g \searrow Y \nearrow h$ ein stabiles Dreieck, so sind

$$\underline{C}(U,X) \xleftarrow{f_*} \underline{C}(U,Z) \quad \text{mit} \quad g_* \searrow \underline{C}(U,Y) \nearrow h_*$$

und

$$\underline{C}(X,V) \xrightarrow{f^*} \underline{C}(Z,V) \quad \text{mit} \quad g^* \nwarrow \underline{C}(Y,V) \swarrow h^*$$

exakt für jedes U, V$\in |\underline{C}|$.

---

[1]) Man verlangt nicht, daß das rechte Rechteck kommutativ (bis auf ein Vorzeichen) ist. Aus (S1 - S5) folgt $hg = 0$ ($h'g' = 0$) (vgl. 8.27Bew(1)). Das rechte Rechteck ist dann tatsächlich kommutativ.

(8.7)COROLLAR: Ist (a,b,c) Morphismus von Δ und sind zwei der drei Morphismen a, b, c Äquivalenzen, so auch der dritte (und damit (a,b,c)!).

(8.8)SATZ: Für stabile $X \xleftarrow{f} Z$ mit $g \searrow Y \nearrow h$, $X' \xleftarrow{f'} Z'$ mit $g' \searrow Y' \nearrow h'$ mit $|f|=|f'|$, $|g|=|g'|$

(===> $|h|=|h'|$) ist $X \oplus X' \xleftarrow{f \oplus f'} Z \oplus Z'$ mit $g \oplus g' \searrow Y \oplus Y' \nearrow h \oplus h'$ stabil.

(8.9)SATZ: Für X, Z $\varepsilon |\underline{C}|$ existiert ein stabiles Dreieck der Form

$X \xleftarrow{0} Z$ mit $i_X \searrow X \oplus Z \nearrow p_Y$

mit i_X, p_Y wie in 3.1.(AK2).

(8.10) Dann beweisen wir:

SATZ (Einhängung): Zu $X \varepsilon |\underline{C}|$ und $q \varepsilon \mathbb{Z}$ existiert ein $X' \varepsilon |\underline{C}|$ und eine Äquivalenz $\sigma^q_X \varepsilon \underline{C}_{-q}(X,X')$.

(Die Bezeichnung σ^q_X unter Fortlassung von X' legitimiert sich nach Auswahl eines X' für jedes X)

Beweis: Zu $X \longleftarrow N$ (irgendein Grad) existiert nach (S4) eine Ergänzung zu einem stabilen Dreieck $X \xleftarrow{} N \xrightarrow{\sigma} X'$ mit $|\sigma|=q$. Mit (S5) füllt man den gestrichelten Morphismus in das ausgezogene Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1} & X & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X \\ \downarrow 1 & & \downarrow \sigma & & \vdots & & \downarrow 1 \\ X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X \end{array}$$

ein[1]). Da $N \longrightarrow N$ stets eine Äquivalenz ist, hat man zwei Äquivalenzen in dem Diagramm. Aus (8.7) folgt, daß σ eine Äquivalenz ist.

Unsere Einhängung ist nicht ganz so stark wie die von |28|, da wir nicht zeigen, daß σ eine Bijektion $|\underline{C}| \longrightarrow |\underline{C}|$ definiert. Diese Tatsache ist für unsere Zwecke nicht notwendig. Es genügt, daß wir den Effekt von 3.8. erzielt haben. Natürlich kann man einen Einhängungsfunktor definieren, wenn man in leicht verständlicher Weise

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' := {}^{q}_{Y}f^{-q}_{X} \\ Y & \xrightarrow{\sigma} & Y' \end{array}$$

setzt.

σ ist dann eine natürliche Transformation in die (q)- Einhängung.

---

[1]) Man kann $(\sigma, 1_N, 1_X) \varepsilon \Delta$ nicht ohne (S5) feststellen, da wir Δ nicht als volle Teilkategorie von $\Delta \underline{C}$ voraussetzten.

8.11. $\underline{S}$ sei eine stabile und $\underline{A}$ eine graduierte abelsche Kategorie. Ein kovarianter Funktor $\alpha: \underline{S} \longrightarrow \underline{A}$ (von graduierten Kategorien), der jedes stabile Dreieck $X \xleftarrow{f} Z$, $X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{h} Z$ von $\underline{S}$ in ein exaktes Diagramm $\alpha X \xleftarrow{\alpha f} \alpha Z$, $\alpha X \xrightarrow{\alpha g} \alpha Y \xleftarrow{\alpha h} \alpha Z$ von $\underline{A}$ überführt, heiße ein Homologiefunktor.

8.12. Durch Dualisierung von $\underline{S}$ oder $\underline{A}$ definiert man Cohomologiefunktoren. Dualisierung von $\underline{S}$ und $\underline{A}$ reproduziert den Begriff des Homologiefunktors.

8.13. SATZ: Homologie- und Cohomologiefunktoren sind additiv.

Beweis: Aus 8.2.(S3), $\alpha 1 = 1$ und der Definition 8.11.(Exaktheit) ergibt sich $\alpha N = N$. Daraus folgt $\alpha 0 = 0$. Anwendung von α auf das Diagramm in (8.9) ergibt eine zerfallende kurze exakte Folge in $\underline{A}$ und daher die Behauptung (3.1o.Lemma 2).

8.14. Aus (8.6) erhält man als Beispiele:
(1) $\underline{S}(U,-) = \hom(U,-)$ für Homologie,
(2) $\underline{S}(-,V) = \hom(-,V)$ für Cohomologie
für irgendwelche $U, V \in |\underline{S}|$.

8.15. $\underline{S}$ sei weiter eine stabile Kategorie. $\underline{A}$, $\underline{B}$ seien graduierte abelsche Kategorien. Wir betrachten ein Diagramm

(8.16)
$$\begin{array}{ccc} & & \underline{A} \\ & \overset{\alpha}{\nearrow} & \downarrow t \\ \underline{S} & & \\ & \underset{\beta}{\searrow} & \\ & & \underline{B} \end{array}$$

von kovarianten Funktoren. α, β seien Homologiefunktoren und t sei additiv. Mit β konstruieren wir wie in 7. beschrieben zu $X \in |\underline{C}|$ ein spektrales Diagramm $SD_l(X,\beta)$. Die zur Konstruktion herangezogenen $\underline{P}$-Auflösungen sollen in $\underline{A}$ eine projektive Auflösung von αX ergeben. Der B^1-Term des spektralen Diagramms für β soll der Wert des linksderivierten Funktors von t auf αX sein.
Wir gehen zunächst auf die Konstruktion des spektralen Diagramms ein und untersuchen den B^1-Term im Anschluß an ein Beispiel in 1o.

8.17. Zunächst betrachten wir

(8.18)
$$\begin{array}{ccc} & \overset{\alpha}{\nearrow} & \underline{A} \\ \underline{S} & & \\ & \underset{\beta}{\searrow} & \\ & & \underline{B} \end{array}$$

und definieren:

(8.19) DEFINITION: $P \varepsilon |\underline{S}|$ heiße α-projektiv, wenn für jedes stabile Dreieck $X \xleftarrow{f} Z$, $g \searrow Y \nearrow h$ mit $\alpha f = 0$ die Folge

$N \longrightarrow \underline{S}(P,X) \longrightarrow \underline{S}(P,Y) \longrightarrow \underline{S}(P,Z) \longrightarrow N$ exakt ist.

(8.20) DEFINITION: Ein Diagramm

(8.21) $$\ldots \xleftarrow{f_2} X_2 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_0} X$$
$$h_2 \nearrow \quad g_2 \searrow P_1 \nearrow h_1 \qquad g_1 \searrow P_0 \nearrow h_0$$

mit α-projektiven P_n und $\alpha f_n = 0$, $n \geq 0$, heißt eine projektive α-Auflösung für X. Zur Normierung verlangen wir außerdem noch $|g_n| = |h_n| = 0$.

Für die Existenz von projektiven α-Auflösungen nehmen wir an:

(8.22) AXIOM: Zu $X \varepsilon |\underline{S}|$ existiert ein stabiles Dreieck $. \xleftarrow{f} X$, $\searrow P \nearrow$ mit α-projektivem P und $\alpha f = 0$.

8.23. Wie in 7. bilden wir zu $X \varepsilon |\underline{S}|$ eine projektive α-Auflösung, wenden B an, ergänzen zu einem exakten Paar von $\underline{B}^{\mathbb{Z}}$ und leiten ein spektrales Diagramm ab, das wir mit $SD_{\iota,\alpha}(X,\beta)$ bezeichnen, da wir sofort die Funktoreigenschaften nachweisen werden.

Wir bemerken zunächst:

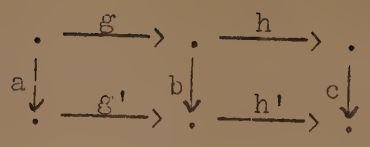
(8.24) Um die formale Übereinstimmung mit den Betrachtungen von 7. zu erzielen, müssten wir die f_n in (8.21) fortlassen. Das können wir unbedenklich tun: statt der vollen Diagramme $. \xleftarrow{f} .$, $g \searrow . \nearrow h$ mit $\alpha f = 0$ betrachten wir die c-Struktur $\underline{P}$ auf $\underline{S}$ mit:

(D1) Objekte von $\underline{P}$ sind die Diagramme $. \xrightarrow{g} . \xrightarrow{h} .$ mit $|g| = |h| = 0$, die sich zu einem stabilen Dreieck $. \xleftarrow{f} .$, $g \searrow . \nearrow h$ mit $\alpha f = 0$ ergänzen lassen[1]).

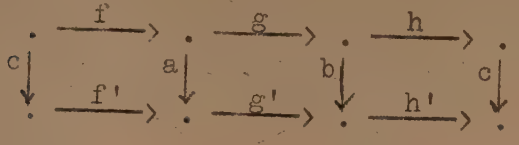
Zu jedem $. \xrightarrow{g} . \xrightarrow{h} .$ werde eine Ergänzung fest gewählt.

(D2) Morphismus $(a,b,c):(g,h) \longrightarrow (g',h')$ ist jedes kommutative Diagramm

[1]) Ist $\alpha f = 0$ für eine, so für jede Ergänzung.



mit $|a|=|b|=|c|=o$ [1]), das bei Ergänzung mit den fest gewählten f, f' einen Morphismus



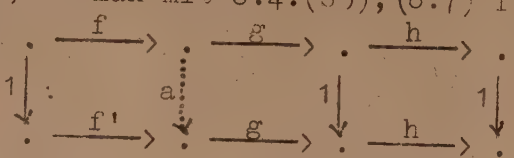
von Δ liefert.

Trivial ist:

LEMMA: P $|\underline{S}|$ ist α-projektiv, genau wenn P $\underline{P}$-projektiv ist.

Zum Beweis bemerkt man, daß es wegen (8.1o) in (8.19) genügt Dreiecke (f,g,h) mit $|g|=|h|=o$ zu betrachten.

Eine projektive α-Auflösung (8.2o) ergibt durch Fortlassung der f_n eine projektive $\underline{P}$-Auflösung. Eine projektive $\underline{P}$-Auflösung ergibt durch Hinzufügung der f_n eine projektive α-Auflösung. Die Wahl der Ergänzung zu den $(g,h)\varepsilon|\underline{P}|$ ist nicht wesentlich, da man mit 8.4.(S5), (8.7) für Ergänzungen f, f' von (g,h) ein Diagramm



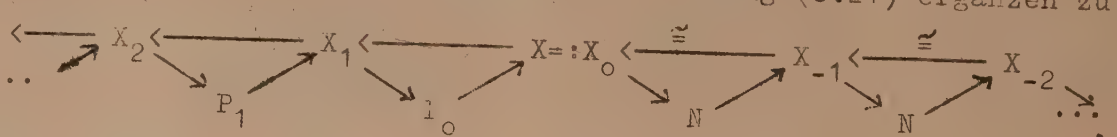
mit einer Äquivalenz a hat; wegen der vereinbarten Beschränkung für die Grade der g, h ist das Diagramm kommutativ.

Um aus dem Homologiefunktor $\beta:\underline{S}\longrightarrow\underline{B}$ einen δ-Funktor $(\underline{S},\underline{P})\longrightarrow\underline{B}$ zu machen definiert man für $X\xrightarrow{g}Y\xrightarrow{h}Z\ \varepsilon\ |\underline{P}|$
$\beta(g,h) := \beta f : \beta Z \longrightarrow \beta X$ mit der fest gewählten Ergänzung[2]) f zu $(f,g,h)\varepsilon\Delta$.

Zur Vereinfachung geben wir f zu (g,h) in Zukunft meist mit an und arbeiten gleich mit stabilen Dreiecken.

(8.25) In einer abelschen Kategorie ist $X\longrightarrow N\longrightarrow X$ nicht kurz exakt. Das ist der Grund dafür, daß wir die Ergänzung nach rechts zu einem exakten Paar (7.2o) erst nach Anwendung von β vornehmen konnten. Mit (8.1o), 8.4(S1) können wir bereits die projektive α-Auflösung (8.21) ergänzen zu

(8.26)



so daß dei Morphismen in der oberen Zeile sämtlich den gleichen Grad haben

---

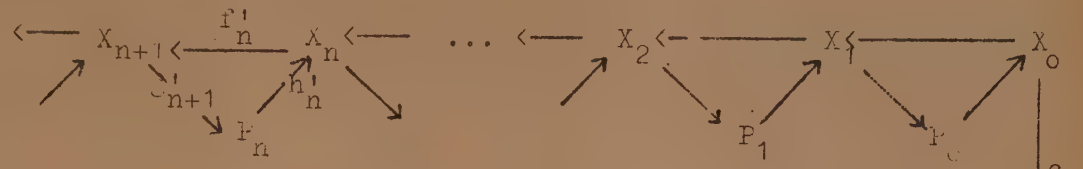
[1]) Diese Einschränkung ist nicht notwendig, aber wegen der Vorzeichen zweckmäßig. $SD_{\iota,\alpha}(-,\beta)$ wird dann ein Funktor auf $\underline{S}_o$.

[2]) Jede andere Wahl der Ergänzung ergibt nach der vorhergehenden Bemerkung einen äquivalenten δ-Funktor.

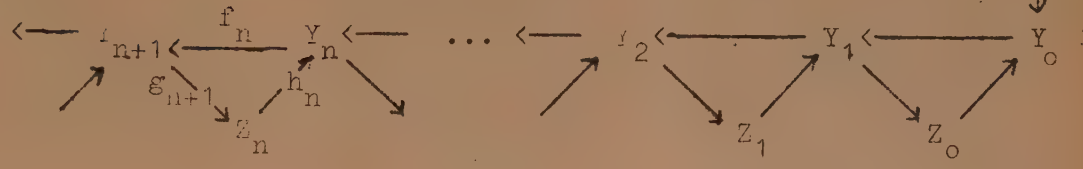
und alle restlichen Morphismen den Grad o haben. Anwendung von B ergibt dann direkt ein exaktes Paar in $\underline{E}^Z$.
Für die weiteren Überlegungen ist es völlig gleichgültig, ob die Ergänzung in $\underline{S}$ oder in $\underline{E}$ vorgenommen wird.

8.27. Wir formulieren den für die Funktoreigenschaften von $BD_{\iota,\alpha}(X,\beta)$ und für Konvergenzuntersuchungen zentralen Satz 7.25. für $\underline{S}$:

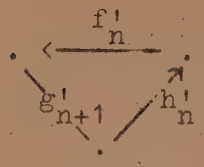
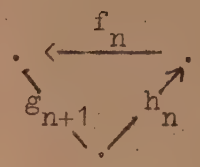
SATZ: Gegeben sei ein Diagramm



(8.28) ...



mit:

(1) die sämtlichen Dreiecke  und  sind stabil,

(2) in der unteren Zeile ist $\alpha f_n = 0$ für alle n,

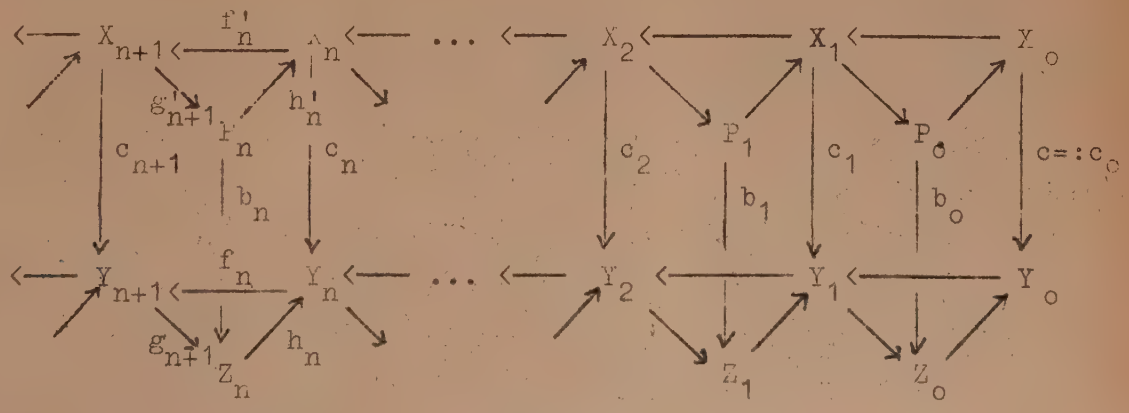
(3) die P_n in der oberen Zeile sind α-projektiv,

(4) $|g_n| = |h_n| = |g'_n| = |h'_n| = o$,

(5) $|c| = o$ [1]).

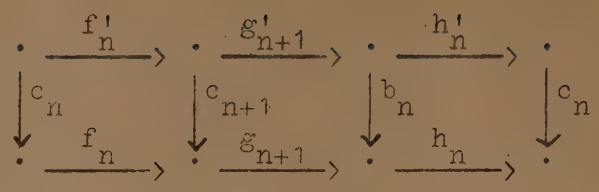
Dann gilt: Das Diagramm ist durch eine Familie von Morphismen $(b_n, c_{n+1} \mid n \geq o)$ zu einem Diagramm

(8.29)



[1]) Die Bedingungen (4,5) sind natürlich wieder überflüssig und dienen zur Vermeidung von nicht gewünschten Vorzeichen.

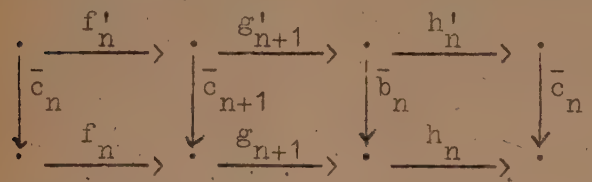
ergänzbar, in dem sämtliche Teile



kommutativ und Morphismen in Δ sind. Notwendigerweise ist $|c_n|=|b_n|=o$.

Das Diagramm (8.29) ist nicht kommutativ, da, wie wir sofort beweisen werden, der Weg um ein stabiles Dreieck der Nullmorphismus ist.

Ist $(\bar{b}_n,\bar{c}_{n+1}|n\geq o)$ eine zweite Familie von Morphismen, die statt $(b_n,c_{n+1}|n\geq o)$ in (8.29) eingetragen kommutative Teile

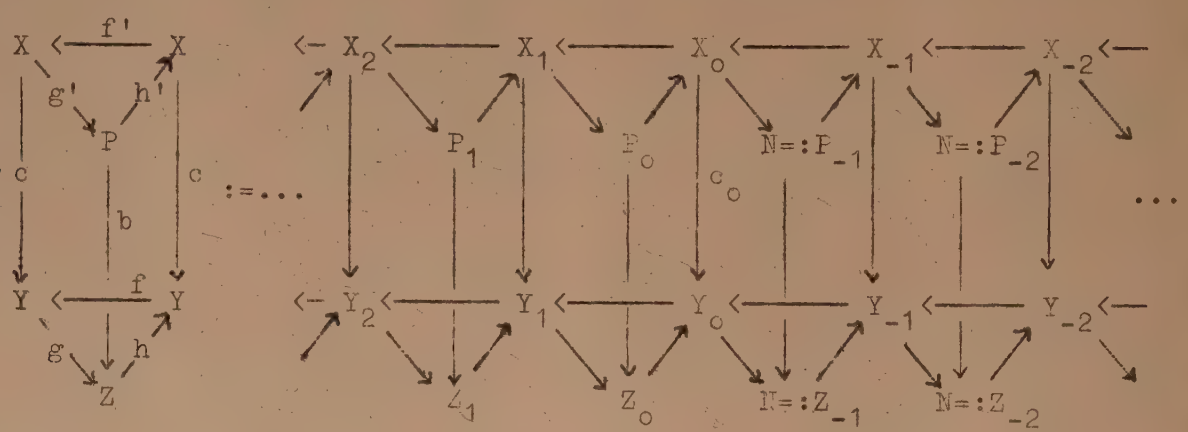


mit $\bar{c}_o := c_o = c$ liefert, so existieren Morphismen $\phi_n : P_n \longrightarrow Z_{n+1}$, $n\geq o$, mit

$g_1h_1\phi_o = b_o$ und $g_{n+1}h_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}g'_nh'_n = b_n - \bar{b}_n$, $n>o$.

Man kann hier bereits (vgl.8.25) das ganze Diagramm (8.29) nach rechts fortsetzen zu

(8.30)



in $\underline{S}^{\mathbb{Z}}$ und hat eine Familie $(\phi_n|n\in\mathbb{Z})$, $\phi_n = 0$ für $n<o$, mit

$gh\phi + \phi g'h' = b - \bar{b}$ in der offensichtlichen Bezeichnungsweise.

Beweis: Den Bewies kann man direkt in $\underline{S}$ führen mit den Methoden von (7.7), 7.25.. Andererseits erhält man den Satz nach geeigneter Definition von c-Strukturen in der oberen und unteren Zeile von (8.28) unter Fortlassung der f_n, f'_n indem man die Voraussetzungen von 7.25. verifiziert. Wir beschreiten den zweiten Weg: In den Bezeichnungen von 7.25. wähle man $\underline{P}$ wie in (8.24), $\bar{\underline{P}}$ wird wie $\underline{P}$ definiert unter Streichung der Forderung $\alpha f = 0$ in (D1).

Wir zeigen:

(1) $g\bar{P}h \Longrightarrow hg = 0$.

Allgemeiner gilt: Ist (f,g,h) ein stabiles Dreieck von $\underline{S}$, so ist die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen des Dreiecks die Null.

Beweis: Wegen 8.4.(S2) genügt es eine der Aussagen $gf = 0$, $hg = 0$, $fh = 0$ zu beweisen. Wir zeigen $hg = 0$. Man entnimmt die Behauptung direkt aus

(8.31)
$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1} & X & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \vdots & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

: Die obere Zeile ist stabil nach 8.4.(S3), das linke Quadrat ist kommutativ. Nach 8.4.(S5) läßt sich hg dann über N zerlegen.

Ein anderer Beweis benutzt die Exaktheit von $\underline{S}(X,X) \xleftarrow{f_*} \underline{S}(X,Z)$ mit $g_*: \underline{S}(X,X) \to \underline{S}(X,Y)$ und $h_*: \underline{S}(X,Y) \to \underline{S}(X,Z)$:

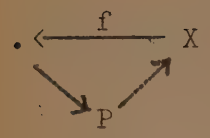
Aus $h_*g_* = 0$ ergibt sich $0 = h_*g_*1_X = hg1_X = hg$. Natürlich erscheint im Beweis von (8.6) die vorhergehende Überlegung mit (8.31), weshalb wir den direkten Beweis vorziehen.

(2) Zu jedem kommutativen Diagramm
$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{\bar{g}} & \cdot & \xrightarrow{\bar{h}} & \cdot \\ & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot & \xrightarrow{h} & \cdot \end{array}$$
mit oberer Zeile in $\bar{\underline{P}}$ und unterer Zeile in $\underline{P}$ und $|b|=|c|=o$ gibt es einen Morphismus
$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{\bar{g}} & \cdot & \xrightarrow{\bar{h}} & \cdot \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot & \xrightarrow{h} & \cdot \end{array}$$
in $\bar{\underline{P}}$.

Beweis: Nach Ergänzung und Anwendung von (S2) benutzt man (S5):
$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \xrightarrow{\bar{h}} & \cdot & \xrightarrow{\bar{f}} & \cdot & \xrightarrow{\bar{g}} & \cdot \\ \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \vdots{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \cdot & \xrightarrow{h} & \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot \end{array}$$
. Wegen $|g|=|h|=|\bar{g}|=|\bar{h}|=|b|=|c|=o$ ist $|a| = o$ und es erscheint kein Vorzeichen.

Hier darf im Gegensatz zu (7.7) die untere Zeile in $\bar{\underline{P}}$ sein. Die Einschränkungen über die Grade der Morphismen dienen natürlich wieder nur zur Vorzeichenvermeidung.

8.32. In
$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \underline{A} \\ \underline{S} & & \\ & \xrightarrow{\beta} & \underline{B} \end{array}$$
(vgl.8.18) seien α, β Homologiefunktoren. Zu $X\varepsilon|\underline{S}|$ existiere ein stabiles Dreieck



mit $\alpha f = 0$ und α-projektivem P (und $|g|=|h|=o$[1]).

Dann gilt:

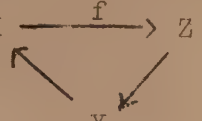
SATZ: Die in 8.17.,8.23. beschriebene Konstruktion eines spektralen Diagramms $SD_{l,\alpha}(X,\beta)$ ist nach Auswahl (von Auflösungen und Ergänzungen nach rechts) ein kovarianter Funktor auf $\underline{S}_o$ und natürlichen Transformationen von β[2]). Je zwei Auswahlen liefern äquivalente Funktoren.

Beweis: 8.27., 7.37..

8.33. Wir betrachten die verschiedenen Dualisierungen und vereinbaren die notwendigen Bezeichnungsänderungen:
(1) Werden $\underline{A}$ und (oder) $\underline{B}$ dualisiert, nicht jedoch $\underline{S}$, so bleiben die Betrachtungen über $\underline{S}$ erhalten. Insbesondere werden α-projektive durch (8.19) und projektive α-Auflösungen durch (8.2o) charakterisiert. 8.27. bleibt ohne Änderung der Formulierung erhalten. Im Falle eines kontavarianten β ($\underline{B}$ ist dualisiert) bezeichnen wir das spektrale Diagramm mit $SD_{r,\alpha}(X,\beta)$. SD ist dann in X kontravariant. An der Varianz in β ändern die Dualisierungen nichts. Zur Bezeichnung vergleiche man auch 8.36..

(2) Wird $\underline{S}$ dualisiert, so bezeichnen wir - unabhängig davon, ob $\underline{A}$ und (oder) $\underline{B}$ dualisiert sind - die durch (vgl. 8.19)

(8.34)

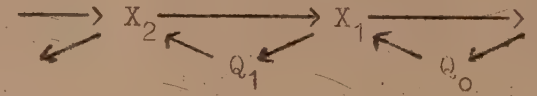


stabil $\alpha f = 0$ ===>

$N \longrightarrow \underline{S}(X,Q) \longrightarrow \underline{S}(Y,Q) \longrightarrow \underline{S}(Z,Q) \longrightarrow N$ charakterisierten

$Q \in |\underline{S}|$ als α-injektiv. Statt (8.21) betrachten wir injektive α-Auflösungen

(8.35)



8.27. ist zu dualisieren. Im Falle eine kovarianten β ($\underline{B}$ ist dualisiert) bezeichnen wir SD_r, im Falle eines kontravarianten β ($\underline{B}$ ist nicht dualisiert) bezeichnen wir SD_l. Die Varianz von SD in X ist dieselbe wie die Varianz von β.

---

[1]) Existiert irgendein Diagramm, so eines mit $|g|=|h|=o$ wegen der Einhängung.

[2]) Natürliche Transformationen von Homologiefunktoren sind einfach gewöhnliche natürliche Transformationen des Funktors β.

Insgesamt haben wir $7 = 2^3 - 1$ (3 Kategorien!) Dualisierungen oder 8 Fälle zu unterscheiden. Die Fälle sind ebensogut charakterisiert durch Angabe der Varianz von α, Varianz von β und des Typs der verwendeten Auflösung (injektiv, projektiv). Wir ziehen diese Charakterisierung vor. Eine Zusammenstellung hat man in der folgenden Tabelle (8.36), deren 5te Spalte angibt, durch Dualisierung welcher der Kategorien man aus dem betrachteten Fall den in diesem Paragraphen ausführlich behandelten Fall in der ersten Zeile der Tabelle erhält. In Übereinstimmung mit der homologischen Algebra bezeichnen wir SD als links deriviert (SD_l) bei kovariantem β und projektiver Auflösung und bei kontravariantem β und injektiver Auflösung etc. (Man vergleiche [25] p.342).
Die drei letzten Spalten der Tabelle beziehen sich auf den Paragraphen 1o (1o.31) dieser Arbeit. Wir geben sie bereits hier mit an, um nicht dort die ganze Tabelle wiederholen zu müssen.

(8.36)

	1 Varianz von β	2 α	3 Aufl. Typ	4 SD	5 Standard in S A B	6 Aufl. in A	7 Varianz t	8 $SD^1_{\cdot,\alpha}(-,\beta)$
1	ko	ko	proj	links	. . .	proj	ko	$L_t\alpha$
2	ko	kontra	proj	links	. * .	inj	kontra	$L_t\alpha$
3	ko	ko	inj	rechts	* * *	inj	ko	$R_t\alpha$
4	ko	kontra	inj	rechts	* . *	proj	kontra	$R_t\alpha$
5	kontra	ko	proj	rechts	. . *	proj	ko	$L_t\alpha$
6	kontra	kontra	proj	rechts	. * *	inj	kontra	$L_t\alpha$
7	kontra	ko	inj	links	* * .	inj	ko	$R_t\alpha$
8	kontra	kontra	inj	links	* . .	proj	kontra	$R_t\alpha$

9. DIE ADAMS'SCHE SPEKTRALFOLGE IN DER STABILEN HOMOTOPIETHEORIE

Wir rekapitulieren die stabile Homotopietheorie von PUPPE |28|,|3o| als Beispiel für eine stabile Kategorie:

9.1. Unter einem CW-Komplex verstehen wir im Folgenden immer einen CW-Komplex mit Grundpunkt *. X^q bezeichnet das q-Gerüst des CW-Komplexes X, man setzt $X^q = *$ für $q<o$. Unter einer Abbildung (von CW-Komplexen) wird stets eine grundpunkttreue zellulare (stetige) Abbildung verstanden[1]).

9.2. Sei $n\in\mathbb{Z}$. Ein n-stabiles Spektrum X ist eine Folge $X = ({}^iX \mid i\in\mathbb{Z})$ von CW-Komplexen ${}^iX$ mit

(SP1) ${}^iX\wedge S^1$ ist Teilkomplex von ${}^{i+1}X$ (S^1 = 1-Sphäre, $\wedge$ = smash, $\wedge S^1$ = reduzierte (topologische) Einhängung von rechts),

(SP2) $({}^iX\wedge S^1)^{2i+n} = ({}^{i+1}X)^{2i+n} =: {}^{i+1}X^{2i+n}$.

Ein für irgendein n n-stabiles Spektrum heißt, falls die Zahl n nicht hervorgehoben werden soll, einfach ein stabiles Spektrum. Ein n-stabiles Spektrum ist trivialerweise m-stabil für jedes $m\leq n$.

9.3. X, Y seien stabile Spektren und es sei $m\in\mathbb{Z}$ oder $m = \infty$. Eine m-Abbildung $f:X \longrightarrow Y$ vom Grade q ist eine Folge $f = ({}^if \mid i\in\mathbb{Z})$ von Abbildungen ${}^if: {}^iX^{2i+m} \longrightarrow {}^{i-q}Y^{2i+m}$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} ({}^iX\,S^1)^{2i+m+1} = {}^iX^{2i+m}\,S^1 & \subset & {}^{i+1}X^{2i+m+1} \\ \downarrow{\scriptstyle {}^if\wedge S^1} & & \downarrow{\scriptstyle {}^{i+1}f} \\ {}^{i-q}Y^{2i+m}\,S^1 & \subset & {}^{i-q+1}Y^{2i+m+1} \end{array}$$

kommutativ ist für jedes i.

$\mathrm{Abb}_q^m(X,Y)$ bezeichne die Menge aller m-Abbildungen vom Grade q von X in Y. Die Einschränkung auf niedrigerdimensionale Gerüste liefert Abbildungen $\mathrm{Abb}_q^m(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Abb}_q^n(X,Y)$ für $m>n$ (das ist die transponierte Gerüstinklusion) und man erhält eine Folge

$$\mathrm{Abb}_q^\infty(X,Y) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Abb}_q^m(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Abb}_q^{m-1}(X,Y) \longrightarrow \ldots,$$

deren direkter Limes mit $\mathrm{Abb}_q(X,Y)$ bezeichnet wird. Die Elemente von $\mathrm{Abb}_q(X,Y)$ heißen Abbildungen vom Grade q von X in Y. Durch Zusammensetzung von Repräsentanten erhält man eine Komposition

$$\mathrm{Abb}_p(X,Y)\times\mathrm{Abb}_q(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Abb}_{p+q}(X,Z).$$

---

[1]) Definition von CW-Komplexen in |34|.

Die stabilen Spektren und ihre Abbildungen bilden eine $\mathbb{Z}$-graduierte Kategorie St.

9.4. Für spätere Anwendungen bemerken wir zwei Hilfssätze:

HILFSSATZ 1: Ist X n-stabil, so ist ${}^{k}X^{i} = *$ für $i < k + \frac{n}{2}$.

HILFSSATZ 2: Sind X, Y stabile Spektren mit ${}^{i}X^{2i+m} = {}^{i}Y^{2i+m}$ für ein m, so repräsentiert die Folge der Identitäten ${}^{i}X^{2i+m} = {}^{i}Y^{2i+m}$ eine Äquivalenz $X \cong Y$.

COROLLAR: Jedes stabile Spektrum X ist für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ äquivalent zu einem Spektrum Y mit ${}^{i}Y = *$ für $i < k$.

(Man setzt ${}^{i}Y := *$ für $i < k$, ${}^{i}Y := {}^{i}X$ für $i \geq k$. Die Äquivalenz ist vom Grade 0).

9.5. Ist X ein stabiles Spektrum und A ein lokal endlicher CW-Komplex, so ist die Folge ${}^{i}(A \wedge X) := A \wedge {}^{i}X$ ein stabiles Spektrum. In naheliegender Weise bildet man für eine Abbildung $f: A \longrightarrow B$ von lokal endlichen CW-Komplexen und $g \in Abb_q(X,Y)$ eine Abbildung $f \wedge g \in Abb_q(A \wedge X, B \wedge Y)$ ($\wedge$ ist ein Funktor mit lokal endlichen CW-Komplexen als erster und stabilen Spektren als zweiter Variabler). Man setze $I^* := I + *$ (I = Einheitsintervall der reellen Zahlen, + = topologische Summe) mit der kanonischen Zerlegung von I als Zellenkomplex) und setze $S^0 := P + *$, wo P ein Punkt ist. $j_\nu: S^0 \longrightarrow I^*$, $\nu = 0, 1$, bezeichne die Abbildungen mit $j_\nu P = \nu \in I$. Zwei Abbildungen $f_0, f_1 \in Abb_q(X,Y)$ heißen homotop, $f_0 \sim f_1$, wenn ein $f \in Abb_q(I^* \wedge X, Y)$ existiert mit $f(j_\nu \wedge 1_X) = f_\nu$ für $\nu = 0, 1$ (dabei setzt man $S^0 \wedge X = X$). Die Homotopie ist eine mit der Komposition der Abbildungen in St verträgliche Äquivalenzrelation. Bezeichnet $Hom_q(X,Y)$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen vom Grade q von X in Y, so hat man daher eine Komposition $Hom_p(X,Y) \times Hom_q(Y,Z) \longrightarrow Hom_{p+q}(X,Z)$. Die stabilen Spektren und Homotopieklassen von Abbildungen bilden eine $\mathbb{Z}$-graduierte Kategorie Stab. Da der Übergang zu Homotopieklassen funktoriell ist, gelten die Hilfssätze 1 und 2 sowie das Corollar auch in Stab.

9.6. Aus der Abbildung $a: S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ mit $at := \begin{cases} 2t, & t \leq \frac{1}{2} \\ 2t-1, & \frac{1}{2} \leq t \end{cases}$ [1])

(S^1 werde mit t als Quotient $S^1 = I/0=1=*$ parametrisiert) erhält man mit den aus der Homotopietheorie bekannten Methoden (z.B. |15|) eine Addition, die wir mit $+$ bezeichnen, in $Hom_p(S^1 \wedge X, Y)$ für jedes p, X, Y. $Hom_p(S^1 \wedge X, Y)$ ist mit dieser Addition eine Gruppe (Es wird auch in $Abb_p(S^1 \wedge X, Y)$ eine Addition induziert, jedoch erhält man keine Gruppe). Nach |30| gibt es

[1]) genauer $(2t, *)$ bzw. $(*, 2t-1)$ bei $S^1 \vee S^1$ (wedge) $\subset S^1 \times S^1$.

zu jedem stabilen Spektrum X eine Äquivalenz $\tau_X \in \mathrm{Hom}_1(S^1 \wedge X, X)$ [1]), so daß für jedes $f: X \longrightarrow Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge X & \xrightarrow{\tau_X} & X \\ {\scriptstyle S^1 \wedge f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S^1 \wedge Y & \xrightarrow{\tau_Y} & Y \end{array}$$

bis auf ein Vorzeichen $(-1)^{|f|}$ kommutativ ist (τ ist eine natürliche Äquivalenz der Funktoren $T: \underline{Stab} \longrightarrow \underline{Stab}$ und $1_{\underline{Stab}}$ mit $TX := S^1 \wedge X$, $Tf := (-1)^{|f|}(S^1 \wedge f)$).

Mit Hilfe der induzierten Äquivalenz $\mathrm{Hom}_p(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{p-1}(S^1 \wedge X, Y)$ [2]) definiert man auch auf der linken Seite eine Gruppenstruktur. Zweimaliges Anwenden der Äquivalenz ergibt, daß die $\mathrm{Hom}_p(X,Y)$ abelsche Gruppen sind. Ferner stellt man fest, daß die Komposition der Morphismen bilinear ist.

9.7. Stab hat ein Nullobjekt N mit ${}^iN = *$ für alle i und es existieren endliche direkte Summen: Für $X, Y \in |\underline{Stab}|$ ist die direkte Summe $X \oplus Y =: X \vee Y$ durch ${}^i(X \vee Y) := {}^iX \vee {}^iY$ definiert (dabei bezeichnet das letzte $\vee$ den üblichen wedge).
Damit ist Stab eine $\mathbb{Z}$-graduierte additive Kategorie.

9.8. Übrigens ist $\vee$ auch direkte Summe im klassischen Sinne von |21| in St, d.h. inverses Produkt im Sinne von |15|. Wir behalten uns die Bezeichnung "direkte Summe" für die Situation 3.1.(AK2) vor, wenn inverses und direktes Produkt übereinstimmen. $\vee$ ist nicht direkte Summe in diesem Sinne in St. Sonst wäre bekanntlich bereits St eine (graduierte) additive Kategorie.

9.9. Man kann die Addition in Stab auch direkt angeben unter Benutzung von Hilfssatz 1 und der Homotopieerweiterungseigenschaft von CW-Paaren. Allgemeine Überlegungen über additive Kategorien ergeben, daß so tatsächlich die vorher definierte Addition beschrieben wird (und daß die Addition unabhängig von der speziellen Wahl der τ_X ist).

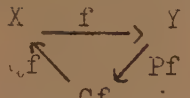
9.10. Als nächstes soll in Stab eine stabile Struktur beschrieben werden: Zu $f \in \mathrm{Abb}^{\omega}(X,Y)$ definiert man den Abbildungskegel Cf durch ${}^i(Cf) := C^i f$, wo die rechte Seite der reduzierte Abbildungskegel von ${}^if: {}^iX \longrightarrow {}^iY$ ist (|27|). Bekanntlich entsteht $C^i f$ aus $(I \wedge {}^iX) + {}^iY$ (bei $* = o \in I$) durch Identifizieren von $(1,x) \in I \wedge {}^iX$ mit ${}^ifx \in Y$. Die Folge der $C^i f$ ist ein stabiles Spektrum.
Die kanonischen Inklusionen und Projektionen ${}^iY \xrightarrow{P^i f} C^i f \xrightarrow{Q' {}^i f} S^1 \wedge {}^iX$,

---

[1]) In |30| mit $|\tau_X|$ bezeichnet. τ_X ist dort der Repräsentant in $\mathrm{Abb}_1(S^1 \wedge X, X)$.

[2]) In der Kategorie der Mengen = bijektive Abbildung.

wo offenbar $S^1 \wedge {}^iX$ der Quotientenraum $C^if/{}^iY$ ist (Zur Bezeichnung vergleiche man bei Unklarheiten |3o| bzw. |27|), liefern Abbildungen von stabilen Spektren $Y \xrightarrow{Pf} Cf \xrightarrow{Q'f} S^1 \wedge X$. Setzt man $Qf := \tau_X Q'f$, so erhält man ein Dreieck



vom Grade -1 in $\underline{St}$. Man ersetze in diesem Dreieck die drei vorkommenden Abbildungen durch ihre Homotopieklassen und bilde in $\underline{Stab}$ die volle Teilkategorie Δ von $\Delta\underline{Stab}$, die gerade alle zu einem solchen Dreieck äquivalenten Dreiecke enthält. Δ ist eine stabile Struktur auf $\underline{Stab}$.

Zur Konstruktion von Δ beachte man, daß sich der Fall von Abbildungen, die nicht den Grad o haben, durch Einhängung auf den behandelten Fall zurückführen läßt. Dabei besteht die Einhängung hier einfach in einer Indexverschiebung. Wir definieren für späteren Gebrauch E_qX durch ${}^i(E_qX) := {}^{i+q}X$. Die Identitäten $1: {}^iX \longrightarrow {}^{i-q}(E_qX) = {}^iX$ repräsentieren eine Äquivalenz aus $Abb_q(X, E_qX)$ und $Hom_q(X, E_qX)$. Für Morphismen, die sich nicht durch ∞-Abbildungen repräsentieren lassen, benutzt man Hilfssatz 2. Für Einzelheiten müssen wir auf |3o| verweisen.

9.11. $(X_\mu | 1 \leq \mu \in \mathbb{Z})$ sei eine Folge von stabilen Spektren. Für $j \in \mathbb{Z}$ definieren wir

(9.12) $${}^jX := \bigvee_\mu {}^jX_\mu .$$

Die Folge der ${}^jX$ genügt 9.2.(SP1), da

$${}^jX \wedge S^1 = (\bigvee_\mu {}^jX_\mu) \wedge S_1 = \bigvee_\mu ({}^jX_\mu \wedge S^1) < \bigvee_\mu {}^{j+1}X_\mu = {}^{j+1}X \text{ ist.}$$

X_μ sei n_μ-stabil. 9.2.(SP2), nämlich $({}^jX \wedge S^1)^{2j+n} = {}^{j+1}X^{2j+n}$ für geignetes n, gilt offenbar, wenn die Folge der n_μ nach unten beschränkt ist [1]).

Unter dieser Voraussetzung ist mit (9.12) ein stabiles Spektrum X definiert, das wir mit $\bigvee_\mu X_\mu$ bezeichnen.

Die Inklusionen ${}^jX_\mu < \bigvee_\mu {}^jX_\mu$ repräsentieren Morphismen $i_\mu : X_\mu \longrightarrow X$. Ordnet man jedem Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ die Familie $(fi_\mu | \mu)$ zu, so hat man eine Abbildung $\underline{Stab}(X,Y) \longrightarrow \prod(\underline{Stab}(X_\mu, Y) | \mu)$ (cartesisches Produkt von Mengen).

(9.13) SATZ: Die Abbildung $\underline{Stab}(X,Y) \longrightarrow \prod(\underline{Stab}(X_\mu, Y) | \mu)$ ist bijektiv für jedes $Y \in |\underline{Stab}|$. [2])

Zum Beweis benutzt man den

---

[1]) gleichbedeutend: Die X_μ sind n-stabil für ein festes n.

[2]) Setzt man $X_\mu := *$ für $\mu > \mu_o$, so bemerkt man, daß der Satz auch für den wedge von endlich vielen X_μ gilt.

(9.14) LEMMA: Ist Y (m+2)-stabil, so läßt sich jede Abbildung $X \longrightarrow Y$ durch eine m-Abbildung $X \longrightarrow Y$ repräsentieren.

Dann definiert man unter Benutzung von (9.13) für jedes μ einen Morphismus $X \xrightarrow{p_\mu} X_\mu$ mit $p_\mu i_\nu = \begin{cases} 0 , & \mu \neq \nu \\ 1_{X_\mu} , & \mu = \nu \end{cases}$. Ordnet man jedem $Y \xrightarrow{f} X$ die Familie $(p_\mu f | \mu)$ zu, so hat man eine Abbildung $\underline{Stab}(Y,X) \longrightarrow \prod(\underline{Stab}(Y,X_\mu)|\mu)$. Darüber beweist man

(9.15) SATZ: Konvergieren die n_μ gegen $+\infty$, so ist

$\underline{Stab}(Y,X) \longrightarrow \prod(\underline{Stab}(Y,X_\mu)|\mu)$ bijektiv für jedes $Y \in |\underline{Stab}|$ [1].

9.16. In irgendeiner Kategorie $\underline{C}$ bezeichnet man eine Familie $(X_\mu \xrightarrow{i_\mu} X | \mu)$ mit (9.13) als inverse Produktdarstellung von X durch die X_μ (|15|). X heißt inverses Produkt der X_μ. Die durch (9.15) beschriebene duale Situation heißt direkte Produktdarstellung und X heißt direktes Produkt. Statt inverses Produkt benutzt man, wie in 9.8. bereits bemerkt, auch die Bezeichnung direkte Summe (|21|). Wir sprechen von direkten Summen nur im Falle 3.1.(AK2). Bekanntlich ist in 3.1.(AK2) $(A \xrightarrow{i_A} C, B \xrightarrow{i_B} C)$ eine inverse und $(C \xrightarrow{p_A} A, C \xrightarrow{p_B} B)$ eine direkte Produktdarstellung. Wir gehen darauf nicht weiter ein, da wir lediglich an der Verwendung der Sätze (9.13) und (9.15) für das in (9.12) definierte X (eventuell auch mit nur endlich vielen X_μ) interessiert sind.

9.17. Seien $U, V \in |\underline{Stab}|$. Wir kehren zu (8.18) zurück und setzen

(9.18) $\beta := \underline{Stab}(U,-)$,
$\alpha := \underline{Stab}(-,V)$.

Suggestiver bezeichnen wir

$\beta = \underline{Stab}(U,-) =: \pi_*$ als Homotopie und

$\alpha = \underline{Stab}(-,V) =: H^*$ als Cohomologie, wobei wir die Indizierung $\pi_q := \underline{Stab}_q(U,-)$ und $H^q := \underline{Stab}_{-q}(-,V)$ vereinbaren.

π_* und H^* sind nach (8.6) Homologie- bzw. Cohomologiefunktoren.

Da $\underline{Stab}$ eine graduierte additive Kategorie ist, ist $H^*V = \underline{Stab}(V,V)$ eine graduierte abelsche Gruppe [2]. Außerdem ist für $f, g \in H^*V = \underline{Stab}(V,V)$ stets gf definiert. Mit + als Addition und der Komposition als Multipli-

---

[1]) Vergleiche Fußnote [2]) auf der letzten Seite.

[2]) Ein Element von $\underline{AbGr}^{\mathbb{Z}}$.

kation ist $\underline{Stab}(V,V) = H^*V$ ein graduierter Ring (mit Einheit 1_V), wie man sofort aus den Axiomen über graduierte additive Kategorien entnimmt.

Darüberhinaus ist $\underline{Stab}(X,V) = H^*X$ für jedes X ein H^*V-links-Modul [1]) und für $f:X \longrightarrow Y$ ist $H^*f:H^*Y \longrightarrow H^*X$ H^*V-linear. Als Ziel von H^* wählen wir daher die Kategorie $\underline{A}$ der (graduierten) H^*V-links-Moduln [2]). Das Bild eines stabilen Dreiecks unter H^* ist auch in $\underline{A}$ exakt, so daß H^* (bei dieser Faktorisierung) ein Cohomologiefunktor bleibt.

Man kann die dualen Bemerkungen über $\pi_* = \underline{Stab}(U,-)$ machen. Wir verzichten jedoch hierauf und fassen π_* als Funktor in graduierte abelsche Gruppen auf.

Man bemerkt das triviale

(9.19) LEMMA: Ist V m-stabil, so ist E_qV (m+2q)-stabil.

Ist dann $(n_\mu \mid 1 \leq \mu \in \mathbb{Z})$ irgendeine Folge von ganzen Zahlen, die gegen $+\infty$ konvergiert, so existiert nach 9.11. ein stabiles Spektrum $Q := \bigvee_\mu E_{n_\mu} V$, das gleichzeitig direktes und inverses Produkt der $E_{n_\mu} V = V$ ist. Wir beweisen:

SATZ: Q ist H^*-injektiv.

Beweis: Zu zeigen ist, daß der Homomorphismus $\underline{Stab}(X,Q) \xrightarrow{H^*} \underline{A}(H^*Q,H^*X)$ injektiv ist für jedes X, daß also aus $H^*f = 0$ für $f:X \longrightarrow Q$ bereits $f = 0$ folgt. Daraus folgt, daß Q H^*-injektiv ist: Ist nämlich $A \xleftarrow{i} C$ mit $A \xrightarrow{j} B \xleftarrow{k} C$ stabil mit $H^*i = 0$, so ist

$$\underline{Stab}(A,Q) \xrightarrow{i^*} \underline{Stab}(C,Q)$$
$$j^* \nwarrow \quad \swarrow k^*$$
$$\underline{Stab}(B,Q)$$

exakt. Für beliebiges $z \in \underline{Stab}(A,Q)$ ist $i^*z = 0$, da $H^*(i^*z) = H^*(zi) = (H^*i)(H^*z) = 0$ ist. Also ist $i^* = 0$ oder $N \longleftarrow \underline{Stab}(A,Q) \longleftarrow \underline{Stab}(B,Q) \longleftarrow \underline{Stab}(C,Q) \longleftarrow N$ exakt [3]).

Sei also $f:X \longrightarrow Q$ mit $H^*f = 0$. H^*f ist ein Homomorphismus $H^*f: H^*Q = \underline{Stab}(Q,V) \longrightarrow H^*X = \underline{Stab}(X,V)$ und hat auf $g \in \underline{Stab}(Q,V)$ nach Definition den Wert $(H^*f)g = gf$. $H^*f = 0$ ist gleichbedeutend mit $gf = 0$ für jedes $g:Q \longrightarrow V$. Also ist $p_\mu f = 0$ für jedes μ für die p_μ aus der direkten Produktdarstellung $(Q \xrightarrow{p_\mu} E_{n_\mu} V \cong V \mid \mu)$. Mit (9.15) folgt $f=0$.

---

[1]) bei der hier verwandten, heute noch überwiegenden Notation $gf = g$ nach f

[2]) H^*V ist die STEENROD-Algebra für $H^* = \underline{Stab}(-,V)$.

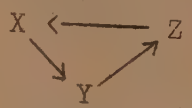
[3]) Übrigens ist Q H^*-injektiv, genau wenn $\underline{Stab}(X,Q) \longrightarrow \underline{A}(H^*Q,H^*X)$ injektiv ist für jedes X. Die andere Richtung ist trivial.

Die Tatsache, daß die n_μ gegen $+\infty$ konvergieren, kommt im Beweis des Satzes nicht explizit vor, sondern wird nur benutzt, um zu sichern, daß Q definiert und direktes Produkt der $E_{..}V$ ist. Der Satz gilt daher auch, wenn Q wedge von endlich vielen $E_{..}V$ ist.

9.20. $X \varepsilon |\underline{Stab}|$ heiße beschränkt endlich erzeugt, wenn

$$H^qX = \begin{cases} \text{endlich erzeugt (als abelsche Gruppe)}, \\ N \text{ , für kleine } q \text{ ist.} \end{cases}$$

$\underline{Stab}_E$ sei die volle Teilkategorie von $\underline{Stab}$, deren Objekte die beschränkt endlich erzeugten $X \varepsilon |\underline{Stab}|$ sind. Man zeigt leicht, daß die Einschränkung von $\Delta\underline{Stab}$ auf $\underline{Stab}_E$ eine stabile Struktur auf $\underline{Stab}_E$ ist. Der wesentliche Punkt hierbei besteht in der Bemerkung, daß in einem stabilen Dreieck

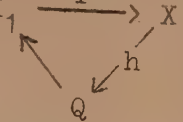


von $\underline{Stab}$ mit zwei Objekten auch das dritte beschränkt endlich erzeugt ist.

(9.21) SATZ: Ist $V \varepsilon |\underline{Stab}_E|$, so existiert zu jedem $X \varepsilon |\underline{Stab}_E|$ eine injektive H^*-Auflösung in $\underline{Stab}_E$.

Hier ist $H^* = \underline{Stab}_E(-,V) = \underline{Stab}(-,V)$, da $\underline{Stab}_E$ voll in $\underline{Stab}$ ist.

Zum Beweis schreibt man die höchstens abzählbare Menge der Erzeugenden der $H^qX = \underline{Stab}_{-q}(X,V)$ in der Form $h_1, h_2, \ldots, h_\mu, \ldots$ auf, wobei man die Anordnung nach fallenden Graden treffen kann: Ist $|h_\mu| = -n_\mu$ [1]), so konvergiert die Folge $(n_\mu | n)$ gegen $+\infty$ oder hat nur endlich viele Glieder. Man definiert ein H^*-injektives $Q := \bigvee_\mu En_\mu V$. Nach (9.15) definieren die h_μ ein $h \varepsilon \underline{Stab}_0(X,Q) = \prod_\mu (\underline{Stab}_{-n_\mu}(X,V) | \mu)$. Klar ist, daß $H^*h : H^*Q \longrightarrow H^*X$ surjektiv ist. Die injektive H^*-Auflösung erhält man, indem man h zu einem stabilen Dreieck



ergänzt und mit X_1 fortfährt. X_1 ist nach dem Obigen aus $\underline{Stab}_E$. "$H^*f = 0$" ist offenbar äquivalent zu "H^*h ist surjektiv".

Damit existiert der früher allgemein konstruierte Funktor $SD_{r,H^*}(-,\pi_*)$ von $\underline{Stab}_{Eo}$ in spektrale Diagramme [2]).

---

[1]) $h_\mu \varepsilon \underline{Stab}_{-n_\mu}(X,V) = H^{n_\mu}X$

[2]) U mit $\pi_* = \underline{Stab}(U,-)$ braucht nicht in $\underline{Stab}_E$ zu sein.

1o. DER E_2-(B^1)-TERM DER SPEKTRALEN FOLGE

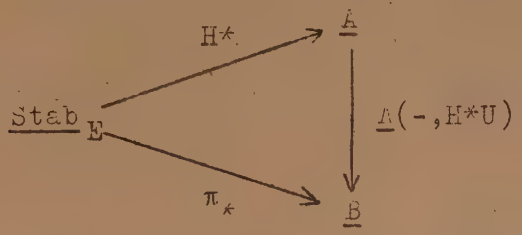
1o.1. Wir kehren zu Diagramm(8.16) zurück mit den Funktoren

$\beta = \underline{Stab}(U,-) = \pi_*$,

$\alpha = \underline{Stab}(-,V) = H^*$ von 9. und

$t := \underline{A}(-,H^*U) = Hom_{H^*V}(-,H^*U)$,

betrachten also die Situation



bei beschränkt endlich erzeugtem V (9.2o.,9.21). Dabei ist $\underline{A}$ die Kategorie der ($\mathbb{Z}$-graduierten) Links Moduln über H^*V und $\underline{B}$ die Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten abelschen Gruppen.

Wir erwähnen, daß $H^*U = \underline{Stab}(U,V) = \pi_*V$ ist.

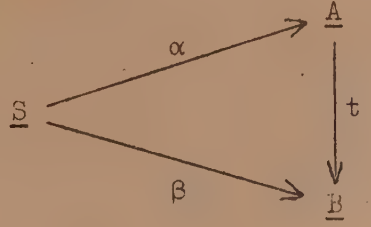
Nach einigen Bemerkungen über die Einhängung untersuchen wir die Folgen der Forderung

(1o.2) $H^qV = N$ für kleine q noch näher.

Es wird sich zeigen, daß dann

(1o.3) $SD^1_{r,H^*}(X,\pi_*) = Ext_{H^*V}(H^*X,H^*U)$ ist.

SD^1 ist der E_2-Term - in unserer Terminologie der B^1-Term - der in 9. konstruierten spektralen Folge (des ... spektralen Diagramms). Anschließend führen wir die notwendigen Annahmen für die abstrakte Situation



ein, die eine entsprechende Gleichung liefern.

1o.4. Man erinnert sich, daß die Morphismen X ——> Y von $\underline{Stab}$ durch m-Abbildungen repräsentiert werden. Die m-Abbildungen vom Grade q gehen

dabei von den ^{i}X in die ^{i-q}Y. Wir hatten eine Einhängung (Indexverschiebung) $E_q:|\underline{Stab}| \longrightarrow |\underline{Stab}|$ definiert mit $^{i}(E_q Z) = {}^{i+q}Z$ und bemerkt, daß die $1:{}^{i}Z \longrightarrow {}^{i}Z = {}^{i-q}(E_q Z)$ Äquivalenzen $\sigma_Z^q: Z \longrightarrow E_q Z$ vom Grade q repräsentieren (s.1o.). Daraus folgt, daß für X, Y ε|Stab| die Zuordnung $f \longrightarrow \sigma_Y^q f \sigma_X^{-p}$ Äquivalenzen

(1o.5) $\underline{Stab}_r(X,Y) \longrightarrow \underline{Stab}_{r+q-p}(E_pX, E_qY)$ definiert [1]).

Ist $\underline{C}$ eine Kategorie von abelschen Gruppen (Moduln), so gehen die Konstituenten eines Morphismus $A \longrightarrow B$ von $\underline{C}^{\mathbb{Z}}$ nach Vereinbarung (1.9.) von A_i nach B_{i+q}. Wir definieren in $\underline{C}^{\mathbb{Z}}$ für jedes $q \varepsilon \mathbb{Z}$ eine Einhängung E_q durch die Indexverschiebung $(E_q C)_i := C_{i-q}$. Dann ist die Folge der Identitäten $1:C_i \longrightarrow C_i = (E_q C)_{i+q}$ eine Äquivalenz $C \longrightarrow E_q C$ vom Grade q. Natürlich ist die Wahl des Vorzeichens bei der Verschiebung eine beliebige Vereinbarung.

Mit dieser Normierung fassen wir (o.5) zu

(1o.6) $\underline{Stab}(E_pX, E_qY) \cong E_{q-p}\underline{Stab}(X,Y)$ (vom Grade o)

zusammen $(\underline{Stab}_r(E_pX, E_qY) \cong \underline{Stab}_{r-q+p}(X,Y) \cong (E_{q-p}\underline{Stab}(X,Y))_r)$.

Schließlich ist

(1o.7) $\mathrm{Hom}(E_pA, E_qB) \cong E_{q-p}\mathrm{Hom}(A,B)$,

wenn in der Zielkategorie $\underline{AbGr}^{\mathbb{Z}}$ von $\mathrm{Hom}(-,-) = \underline{C}^{\mathbb{Z}}(-,-)$ dieselbe Vereinbarung wie in $\underline{C}^{\mathbb{Z}}$ getroffen wird.

1o.8. SATZ: Ist $H^qV = N$ für kleine q, so ist

(1) H*Q ein freier H*V-Modul und

(2) $\underline{Stab}(X,Q) \xrightarrow{H^*} \underline{A}(H^*Q, H^*X)$ isomorph für jedes Xε|Stab|

für $Q = \bigvee_\mu E_{n_\mu} V$ bei $(n_\mu|\mu = 1;2,\ldots) \longrightarrow \infty$ oder $(n_1,\ldots n_{\mu_o})$

wie in 9..

Daß H* in (2) injektiv ist ohne die Voraussetzung über H^qV hatten wir bereits im Beweis des Satzes von 9.17. bemerkt. Durch die Forderungen (1) und (2) wurden von PUPPE (nicht veröffentlicht) "H*-injektive" definiert. Man vergleiche besonders |3|p.279(i,ii).

Zum Beweis von (1) rechnet man

$H^*Q = \underline{Stab}(\bigvee_\mu E_{n_\mu} V, V) = \prod_\mu E_{-n_\mu}\underline{Stab}(V,V) = \bigoplus_\mu E_{-n_\mu}\underline{Stab}(V,V)$ nach. Die

[1]) Es ist $|\sigma_Y^q f \sigma_X^{-p}| = |\sigma_Y^q| + |f| + |\sigma_X^{-p}| = q + |f| - p$

zweite Gleichung gilt, da q inverses Produkt der $E_{n_\mu} V$ ist, die dritte [1] folgt aus der Bedingung des Satzes: Ist nämlich $\underline{Stab}_q(V,V) = 0$ für große q, so treten in

$$(\prod_\mu E_{-n_\mu} Stab(V,V))_i = \prod_\mu Stab_{i+n_\mu}(V,V) = \prod_\mu H^{-i-n_\mu}(V,V)$$ wegen $n_\mu \longrightarrow \infty$

nur endlich viele von N verschiedene Faktoren auf. (1) ist demnach auch ohne die Voraussetzung über H^qV richtig, wenn man nur ein μ_o-Tupel $(n_1,\ldots,r_{\mu_o})$ hat.

Für (2) rechnet man

$$\underline{A}(H^*Q,H^*X) = \underline{A}(\underline{Stab}(\bigvee_\mu E_{n_\mu} V,V),\underline{Stab}(X,V)) \cong \prod_\mu \underline{A}(E_{-n_\mu}\underline{Stab}(V,V),\underline{Stab}(X,V)) \cong$$

$$\cong \prod_\mu \underline{A}(\underline{stab}(V,V),E_{n_\mu}\underline{Stab}(X,V)) \cong \underline{A}(\underline{Stab}(V,V),\underline{Stab}(X,\bigvee_\mu E_{n_\mu} V)) \cong$$

$$\cong Hom_{H^*V}(H^*V,\underline{Stab}(X,Q)) = \underline{stab}(X,Q)$$ unter Benutzung von (1).

Für X = U erhält man

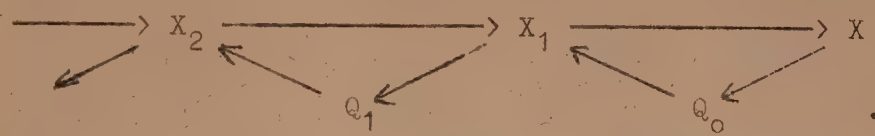
(10.9) COROLLAR: $\underline{A}(H^*Q,H^*U) \cong \underline{Stab}(U,Q) = \pi_*Q$.

Die Rechnung ist natürlich nur eine Beweisanleitung. Man muß sich davon überzeugen, daß die Isomorphie von $f \longrightarrow H^*f$ vermittelt wird. Die Tatsache, daß die H^qV endlich erzeugt seien, wurde zum Beweis des Satzes nicht benutzt, sondern ist nur generelle Voraussetzung für die Existenz von Auflösungen.

10.10. Wir setzen voraus: V sei beschränkt endlich erzeugt.

Dann betrachten wir für $X \in |\underline{Stab}_E|$ eine injektive H*-Auflösung

(10.11)



Nach Definition ist $SD^1_{r,H^*}(X,\pi_*)$ die Homologie des Kettenkomplexes

(10.12) $\ldots \longleftarrow \pi_*Q_1 \longleftarrow \pi_*Q_o \longleftarrow N \longleftarrow N \longleftarrow \ldots$.

Wenden wir H* auf (10.11) an, so erhalten wir ein Diagramm

(10.13)

dessen Dreiecke exakt sind. Da nach (10.8,1) die H^*Q_i frei in $\underline{A}$ (frei über H*V) sind, stellt (10.13) eine freie Auflösung

---

[1] $\oplus$ ist die übliche direkte Summe (inverses Produkt) von (graduierten) Moduln und in diesem Falle sowohl inverses als auch direktes Produkt.

über H*V) sind, stellt (1o.13) eine freie (projektive) Auflösung

(1o.14) $\quad \cdots \longrightarrow H^*Q_1 \longrightarrow H^*Q_0 \longrightarrow H^*X \longrightarrow N$

für H*X dar. Nach Definition ist $\mathrm{Ext}_{H^*V}(H^*X,H^*U)$ die Homologie des Kettenkomplexes

(1o.15) $\quad \cdots \leftarrow \underline{A}(H^*Q_1,H^*U) \leftarrow \underline{A}(H^*Q_0,H^*U) \leftarrow N \leftarrow \cdots,$

das ist

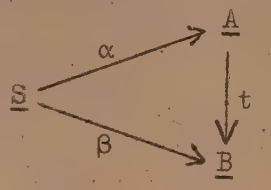
$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_{H^*V}(H^*Q_1,H^*U) \leftarrow \mathrm{Hom}_{H^*V}(H^*Q_0,H^*U) \leftarrow N \leftarrow \cdots .$$

Für unsere Verallgemeinerung ist die Homologie von (1o.15) besser formuliert: Der Wert auf H*X des rechtsderivierten Funktors des (kovarianten additiven) Funktors $\underline{A}(-,H^*U):\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$.

Wegen des Satzes (1o.8(2)) und der Bemerkung, daß $f \longrightarrow H^*f$ natürlich ist, stimmen die Komplexe (1o.12) und (1o.15) überein. Damit ist (1o.3) gezeigt.

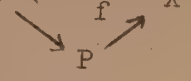
1o.16. Wir kehren zu der allgemeinen Situation

(1o.17)



zurück und erinnern:

$\underline{S}$ ist eine stabile Kategorie, $\underline{A}$ und $\underline{B}$ sind graduierte abelsche Kategorien und α und β sind Homologiefunktoren. Zur Existenz des funktoriellen spektralen Diagramms $SD_{t,\alpha}(X,\beta)$ nehmen wir an, daß zu jedem $X \in |\underline{S}|$ ein stabiles Dreieck



mit $\alpha f = 0$ und α-projektivem P existiert.

Ferner sei t kovariant und additiv.

1o.18. Nehmen wir an, daß für jedes $A \in |\underline{A}|$ eine projektive Auflösung

(1o.19) $\quad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow N$

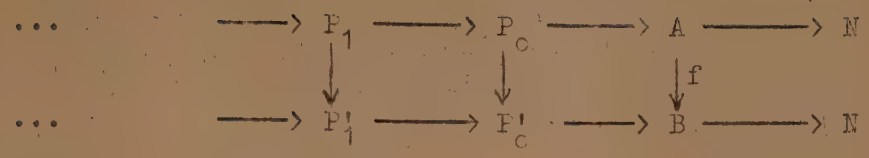
existiert, so definiert man in bekannter Weise den linksderivierten Funktor $Lt:\underline{A} \longrightarrow \underline{B}^{\mathbb{Z}}$ von t durch:

(1) LtA ist die Homologie des Komplexes

(1o.2o) $\quad \cdots \longrightarrow tP_2 \longrightarrow tP_1 \longrightarrow tP_0 \longrightarrow N \longrightarrow \cdots ,$

(2) Für $f:A \longrightarrow B$ bildet man mit Satz (7.7(1)) ein kommutatives Leiterdiagramm

(1o.21)



aus dem man Ltf:LtA ⟶ LtB erhält.

Daß Lt nach Auswahl von Auflösungen ein Funktor und bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, folgt aus Satz (7.7(2)) wie in 7.37. für das spektrale Diagramm, da t additiv ist.

1o.22. Wir wollen die zu (1o.3) analoge Formel $SD^1_{l,\alpha}(X,\beta) = Lt\alpha X$ [1]) oder allgemeiner

(1o.23) $SD^1_{l,\alpha}(-,\beta) = Lt\alpha$

erzielen. Für (1o.3) hatten wir 1o.8. benutzt, wenn auch nicht in voller Schärfe. Wir formulieren den für den Beweis von (1o.3) benutzten Teil von 1o.8. nun als Annahme:

(1o.24) AXIOM:

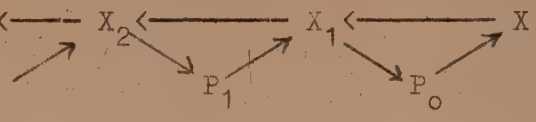
(1) Ist P α-projektiv, so ist αP projektiv in $\underline{A}$,

(2) Die Funktoren $\beta|\underline{S}_\alpha : \underline{S}_\alpha \longrightarrow \underline{B}$ und $t\alpha|\underline{S}_\alpha \longrightarrow \underline{B}$ sind äquivalent.

Dabei bezeichne $\underline{S}_\alpha$ die volle Teilkategorie von $\underline{S}$, deren Objekte die α-projektiven von $\underline{S}$ sind. In 1o.8. ist bereits $\beta \cong t\alpha$ auf $\underline{S}$.

Unter der Annahme von (1o.24) ist klar, daß man aus der projektiven α-Auflösung

(1o.25)



einerseits $SD^1_{l,\alpha}(X,\beta)$ als Homologie von

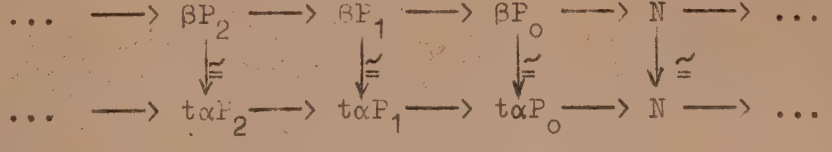
(1o.26) $\quad \cdots \longrightarrow \beta P_2 \longrightarrow \beta P_1 \longrightarrow \beta P_o \longrightarrow N \longrightarrow \cdots$

und LtαX als Homologie von

(1o.27) $\quad \cdots \longrightarrow t\alpha P_2 \longrightarrow t\alpha P_1 \longrightarrow t\alpha P_o \longrightarrow N \longrightarrow \cdots$

bekommt. Da (1o.24,2) ein kommutatives Diagramm

(1o.28)



liefert, ist $SD^1_{l,\alpha}(X,\beta) = Lt\alpha X$.

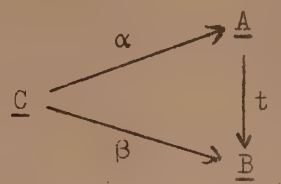
---

[1]) LtαX hat nur Sinn als $Lt\alpha X = (Lt)(\alpha X) = ((Lt)\alpha)X$.

Die natürliche Äquivalenz (1o.23) ergibt sich, da für X ——> Y beide, $SD^1_{l,\alpha}(f,\beta)$ und $Lt\alpha f$, mit derselben Fortsetzng mittels 8.27. konstruiert werden können, ebenfalls aus (1o.24,2).

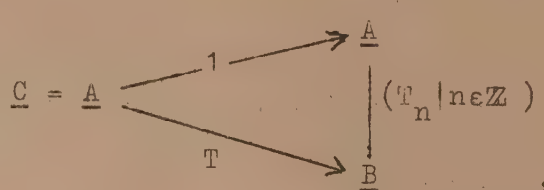
1o.29. (1o.24) erscheint in einem Punkte schärfer als 1o.8.: wir hatten 1o.8. nicht für alle H*-injektiven von $\underline{Stab}_E$ bewiesen sondern nur für die $\bigvee_\mu En_\mu V$. Tatsächlich gibt es aber noch mehr H*-injektive. (1o.3) wird natürlich hiervon nicht berührt, da es genügt irgendeine injektive H*-Auflösung zur Berechnung von SD heranzuziehen und stets eine solche mit den $\bigvee_\mu En_\mu V$ existiert. Daraus folgert man aber leicht, daß 1o.8. bereits für alle H*-injektiven gilt, und allgemeiner kann man in irgendeiner stabilen Kategorie, in der genügend viele α-projektive mit (1o.24) existieren, um jedes Objekt projektiv aufzulösen, zeigen, daß jedes α-projektive (1o.24) genügt.

1o.3o. Man kann die Betrachtungen allgemeiner wie in 7. für ein Diagramm



durchführen für eine c-Kategorie $\underline{C}$, einen δ-Funktor β und einen c-Funktor α bei der kurz exakten c-Struktur in $\underline{A}$. Weiter kann man natürlich die Definition der derivierten Funktoren in $\underline{A}$ von Auflösungen mit kurz exakten Folgen auf Auflösungen mit irgendeiner c-Struktur verallgemeinern ($\underline{A}$ braucht dann auch nicht abelsch zu sein). Ob diese Verallgemeinerung sinnvoll ist, hängt davon ab, ob man in Anwendungen, bei denen projektive (injektive) Auflösungen nicht existieren, derivierte Funktoren mit einer anderen c-Struktur vernünftig berechnen kann.

Bei der zu Anfang von 7. angegebenen Konstruktion von DOLD |11| hat man eine Formel (1o.23), wie man dort trivial einsieht(DOLD |11| 1.2Satz(1)). Will man diesen Fall unter das obige Schema bringen, so setzt man $\underline{C} = \underline{A}$, $\underline{B} = \underline{B}'^{\mathbb{Z}}$ und betrachtet



wo $(T_n|n\in\mathbb{Z})$ die Folge der den δ-Funktor T konstituierenden (additiven) Funktoren T_n ist (bei Fortlassung der Randoperatoren).

10.31. Man hat die verschiedenen Dualisierungen: Wir geben die entsprechenden Bezeichnungen in den letzten drei Spalten der Tabelle (8.36) an. Rt ist der rechtsderivierte Funktor von t.

11. ZUR KONVERGENZ DER ADAMS'SCHEN SPEKTRALFOLGE IN DER STABILEN HOMOTOPIETHEORIE

Wir betrachten den spektralen Funktor $SD_{r,H^*}(-,\pi_*)$ von 9. mit $H^* = \underline{Stab}(-,V)$ und $\pi_* = \underline{Stab}(U,-)$ und untersuchen seine Konvergenz für eine spezielle Wahl von U (Sphäre). Von V wird stets angenommen, daß es beschränkt endlich erzeugt ist. Definitionsbereich des spektralen Funktors SD ist $\underline{Stab}_{Eo}$.

11.1. Wir definieren ein stabiles Spektrum S durch

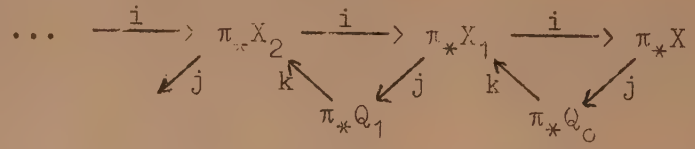
$$i_S := \begin{cases} *, & i<o \\ S^i, & i\geq o \end{cases}$$

. Dabei bezeichnet S^i die Standard-i-Sphäre in $\mathbb{R}^{i+1}$. Offenbar ist S (-1)-stabil. S heißt die stabile 0-Sphäre oder einfach die Sphäre von Stab.

Wir setzen U := S und bezeichnen wieder $\underline{Stab}(S,-) =: \pi_*$. π_* heißt der Homotopiefunktor von Stab. Da wir hier auch die einzelnen π_q zu betrachten haben, erinnern wir daran, daß wir $\pi_q = \underline{Stab}_q(S,-)$ vereinbart hatten, die Indizes an π_* und $\underline{Stab}(S,-)$ also gleichsinnig gewählt sind.

11.2. Wir schreiben den interessanten Teil

(11.3)



des exakten Paares, aus dem wir $SD_{r,H^*}(X,\pi_*)$ gewinnen, auf und haben, da wir uns im Falle (7.51) befinden, zu prüfen, ob $Kern Bild^\infty = N$ ist.

$Kern Bild^\infty$ ist als Teil von $(\ldots,\pi_*X_2,\pi_*X_1,\pi_*X,\pi_*E_{-1}X,\ldots)$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-graduiert. Der erste Index "s" beziehe sich auf X_s, der zweite Index "t" beziehe sich auf π_t. Wir haben zu untersuchen, ob $(Kern Bild^\infty)_{s,t} = N$ ist für jedes s,t.

Naturgemäß hängt diese Frage von X und V ab (S haben wir fest gewählt). Wir geben im Folgenden einige für $Kern Bild^\infty = N$ hinreichende Eigenschaften von X und V an:

11.4. SATZ(PUPPE): Ist

$$\pi_q V = \begin{cases} \mathbb{Z} , & q = o \\ N , & q \neq o \end{cases} \quad \text{und} \quad \pi_q X = \begin{cases} \text{endlich erzeugt für jedes } q \\ N , \text{ für kleine } q \end{cases} ,$$

so ist $\mathrm{Ker}i \cap \mathrm{Bi}i^{\infty} = N$.

Wegen der Einhängung ist es nicht wesentlich, ob man gerade $\pi_o V = \mathbb{Z}$ verlangt. In den etwas detaillierteren weiteren Aussagen würden allerdings dann unwesentliche (additive) Korrekturen an den Indizes anzubringen sein, wenn man ein $\pi_{q_o} V$ statt π_o wählt.

Sei $\pi_q X = N$ für $q < m =: m_o$. Für X_1 hat man eine exakte Folge

$$\pi_* X_1 \longrightarrow \pi_* X$$
$$\nwarrow \quad \swarrow$$
$$\pi_* Q_o$$

, aus der man, da X_1 beschränkt endlich erzeugt und $\pi_q V = N$ für $q<o$ ist, entnimmt, daß $\pi_q X_1 = N$ ist für $q < m_1$ für ein geeignetes $m_1 \in \mathbb{Z}$. Entsprechend sei $\pi_q X_s = N$ für $q < m_s$. Der Satz ist Corollar des

(11.5) LEMMA: Sei

$$\pi_q V = \begin{cases} \mathbb{Z} , & q = o \\ N , & q \neq o \end{cases} \quad \text{und} \quad \pi_q X = \begin{cases} \text{endlich erzeugt für alle } q \\ N , & q < m \end{cases} .$$

Dann ist $(\mathrm{Bi}i^{l})_{s,t} = N$ für $l \geq 2(t - m_s) + 2$ bei $s \geq o$ und m_s hängt wie eben bemerkt von H*X ab.

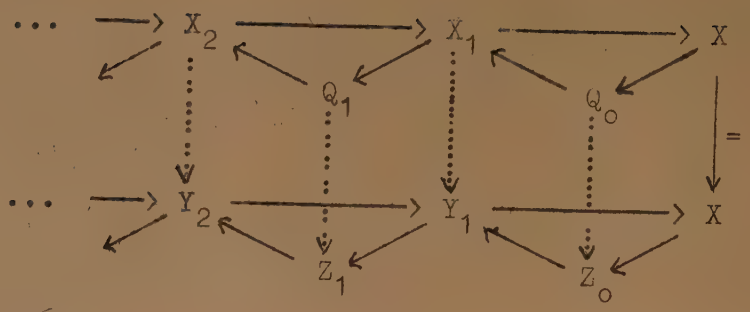
Wir interessieren uns nur für $s \geq o$, da für $s < o$ sowieso $B_{s,t} = N$ und damit alle $B^r_{s,t} = N$ sind. Der Teil $s < o$ des exakten Paares erscheint in unseren Beispielen nur aus ästhetischen Gründen (einfachere Dualisierung in der allgemeinen Theorie).

11.6. Schließlich kann man, um eine noch detailliertere Konvergenzaussage zu erzielen, auch noch die linke Spalte des spektralen Diagramms (5.104) für s,t betrachten: $\mathrm{In}(SD_{r,H^*}(X,\pi_*))_{s,t}$ für $s \geq o$ ist $(\mathrm{Cobi}^{s})_{s,t} = (\mathrm{Cobi}^{s+1})_{s,t} = \ldots = (\mathrm{Cobi}^{\infty})_{s,t}$, da $i^{s+r}_{s,t} = i^{r}_{o,t-s} i^{s}_{s,t}$ mit der Äquivalenz (Injektion) $i^{r}_{o,t-s}$ ist. Aus dem Lemma und dieser Bemerkung entnimmt man für $s \geq o$:

(11.7) SATZ: $B^{\infty}_{s,t} = B^{l}_{s,t}$ für $l \geq \max(s, 2(t-m_s)+2)$ bei den gleichen Voraussetzungen wie in (11.5).

11.8. Der Beweis des Lemmas (11.5) benutzt 8.27.(7.25.): Man betrachtet ein Diagramm

(11.9)



(ausgezogene Pfeile) mit:

Die obere Zeile ist eine injektive H*-Auflösung für X.

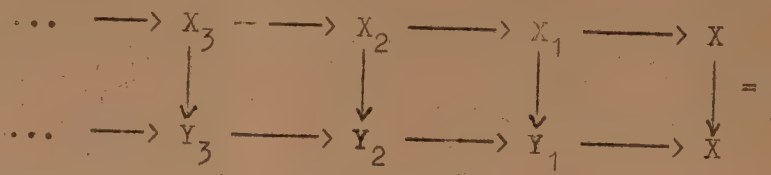
In der unteren Zeile sind die Z_n H*-injektiv und die Dreiecke sind stabil. Die untere Zeile ist aber keine H*-Auflösung für X; dafür geht $\bar{m}_s$ mit $\pi_q Y_s = N$ für $q < \bar{m}_s$ sehr schnell hoch:

$\bar{m}_{2s} = m_o + 3s$ und $\bar{m}_{2s+1} = m_o + 3s + 1$.

Mit 8.27. ergänzt man in (10.9) die gestrichelten Pfeile.

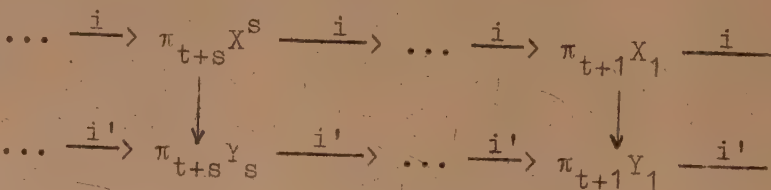
Dann betrachtet man den kommutativen Teil

(11.10)



auf den man π_* anwendet, das wir für t betrachten:

(11.11)



Offenbar ist $(Bili^b)_{o,t} \subset (Bili^s)_{o,t} = 1_{\pi_t X}(Bili^s)_{o,t} \subset (Bili'^s)_{o,t}$

und $(Bili'^s)_{o,t} \subset \pi_{t+s} Y_s = N$ für $s \geq 2(t-m) + 2$.

Zur Konstruktion der Y_s muß man eine Reihe von bekannten Sätzen der Homotopietheorie auf die stabile Homotopietheorie übertragen. Es wird verwandt:

1. Existenz von EILENBERG-MAC'LANE- Objekten (|3o|),
2. HUREWICZ- Isomorphie
3. KÜNNETH- Folge zwischen Homologie und Cohomologie.

Darauf beginnt man mit dem Töten von $\pi_m X$ durch $Z_o := K(\pi_m X, m)$ (EILENBERG-MAC'LANE-Objekt) mit $\pi_m Z_o = \pi_m X$ und $\pi_q Z_o = N$ für $q \neq m$) etc..

Anschließend bemerkt man, daß man die Konstruktion statt auf X auch auf X_s anwenden kann, um $(Bili^b)_{s,t} = N$ für $s > o$ zu bekommen.

Die Z_s werden als wedge von Exemplaren V konstruiert. Mit der Bemerkung

(11.12) LEMMA: Ist W H*-injektiv, so ist jeder direkte Summand von W H*-injektiv,

läßt sich 11.4.,(11.5),(11.7) sofort übertragen auf den Fall $V = V' \vee V''$ mit $\pi_q V' = \begin{cases} N, & q \neq o \\ \mathbb{Z}, & q = o \end{cases}$.

11.13. Für „Koeffizienten" $\mathbb{Z}_p$ statt $\mathbb{Z}$, d.h. $\pi_q V = \begin{cases} N, & q \neq o \\ \mathbb{Z}_p, & q = o \end{cases}$, wo p eine Primzahl ist, ist ein Konvergenzresultat in |14|C.Lemme I für den nichstabilen Fall und Homologie statt H* ausführlich dargestellt, das sich ohne weiteres auf unseren Fall überträgt. Man beweist insbesondere:

(11.14) LEMMA: $(\mathrm{Bili}^{\infty})_{s,t}$ besteht aus den Elementen von $\pi_t X_s$, die durch jede Potenz von p teilbar sind. Da $\mathrm{Keri} = \mathrm{Bil}(\pi_* Q_* \longrightarrow \pi_* X_*)$ mit $\pi_* Q_*$ ein $\mathbb{Z}_p$-Modul ist, ist dann $\mathrm{Keri} \wedge \mathrm{Bili}^{\infty} = N$.

(Man hat für das Lemma wieder $\pi_q X = N$ für kleine q und sonst endlich erzeugt vorauszusetzen).

(11.14) verallgemeinert man auf $V = V' \vee V''$ mit $\pi_q V' = \begin{cases} N, & q \neq o \\ \mathbb{Z}_p, & q = o \end{cases}$, wobei man aber über V'' weitere Voraussetzungen (11.15) machen muß.

11.15. Zusammenfassend formulieren wir:

SATZ: Sei $\pi_q V = \begin{cases} N, & q \neq o \\ G, & q = o \end{cases}$ und $\pi_q X = \begin{cases} \text{endlich erzeugt für alle } q \\ N \text{ für kleine } q \end{cases}$

und $\pi_o V = G$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe,

$G = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\mathrm{rang}G} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{n_r}}$ bei nicht notwendig $p_i \neq p_j$ mit Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.

Dann gilt:

(1) Treten in der Zerlegung von G Summanden $\mathbb{Z}$ auf ($\mathrm{rang}G > o$), so ist $\mathrm{Bili}^{\infty} = N$,

(2) Treten keine Summanden $\mathbb{Z}$ auf, ist also $G = \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{m_r}}$

mit Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ aber nicht notwendig $p_i \neq p_j$, so gilt:

(a) Die Elemente, die durch jede Potenz der p_i teilbar sind, sind in Bili^{∞},

(b) Wenn für jede Primzahl p, die in irgendeiner Potenz in $p_1^{m_1}, \ldots, p_r^{m_r}$ erscheint, auch p in $p_1^{m_1}, \ldots, p_r^{m_r}$ erscheint, so enthält Bili^{∞} keine Elemente, die nicht durch jede Potenz von $p_1 \ldots p_r$ teilbar sind. In diesem Falle ist $\mathrm{Keri} \wedge \mathrm{Bili}^{\infty} = N$.

ANHANG:

Beispiel für die nicht eindeutige Ergänzbarkeit zu Morphismen bei stabilen Dreiecken.

Wir benutzen die Existenz eines (EILENBERG-MAC'LANE) Objekts $K\mathbb{Z}_6$ in der stabilen Homotopietheorie von 9.,|28|,|3o| mit

$$\pi_q K\mathbb{Z}_6 := \underline{Stab}_q(S, K\mathbb{Z}_6) = \begin{cases} N, & q \neq o, \\ \mathbb{Z}_6, & n = o, \end{cases}^{1)} \quad \text{und}$$

$$\underline{Stab}_o(K\mathbb{Z}_6, K\mathbb{Z}_6) = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6.$$

Wir bezeichnen $K\mathbb{Z}_6 =: K$ und die Morphismen $K \longrightarrow K$ mit $\bar{1},\bar{2},\ldots,\bar{5},\bar{0}$, so wie sie $1,2,\ldots,5,0=6 \in Hom(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$ entsprechen.

Das Dreieck $K \longleftarrow N$, $1_K = \bar{1}$, K ist stabil. $K \xleftarrow{\bar{2}} K'$ werde mit 8.4.(S4) gebildet. Dann ist

$$\begin{array}{ccccccc} K' & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\bar{2}} & K & \longrightarrow & K' \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{0}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{0}} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{0}} \\ N & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\bar{1}} & K & \longrightarrow & N \end{array}$$

kommutativ mit $b = \bar{0}$ und $b = \bar{3}$, da $(\bar{3}\bar{2}) = \overline{32} = \bar{0} = \overline{10} = \bar{1}\bar{0}$ ist unter Ausnutzung der angegebenen Isomorphie. Wieder wegen dieser Isomorphie ist $\bar{3} \neq \bar{0}$. $(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$ und $(\bar{0},\bar{3},\bar{0})$ sind Morphismen der stabilen Struktur $\triangle$ von $\underline{Stab}$.

LITERATUR

|1| J.F.Adams, Une relation entre groupes d'homotopie et groupes de cohomologie, C.R.Acad.Sci.Paris 245(1957),pp.24,25.

|2| ....., On the Structure and Applications of the STEENROD Algebra, Commentarii Math.Helv.32(1958).

|3| ....., Théorie de l'homotopie stable, Bull.Soc.Math.France 87 (1959). Auch erschienen in Colloques intern.C.N.R.S. 89 (1959) Lille.

|4| ....., Stable Homotopy Theory, Lecture Notes by A.T.Vasquez, University of California, July 1961.

|5| N.Bourbaki, Description de la Mathématique Formelle (Théorie des Ensembles, chap.1), Paris 1960.

|6| ....., Théorie des Ensembles (chap.2), Paris 1960.

|7| ....., Ensembles Ordonnés, Cardinaux, Nombres Entiers (Théorie des Ensembles, chap.3), Paris 1963.

|8| ....., Structures Algébriques (Algèbre, chap.1), Paris 1958.

|9| D.A.Buchsbaum, Exact Categories and Duality, Trans.A.M.S.80(1955).

|10| H.Cartan - S.Eilenberg, Homological Algebra, Princeton 1956.

|11| A.Dold, Universelle Koeffizienten, Math. Zeitschrift 80(1962).

|12| ....., Relations between ordinary and extraordinary cohomology, Coll. on Algebr. Topology, Aarhus 1962.

|13| ....., Half exact functors and cohomology, A.M.S.Summer Institute on Topology, Seattle 1963.

|14| A.Douady, La suite spectrale d'Adams, Sem.Cartan 1958/59(Invariant de Hopf et Opérations Cohomologiques Secondaires).

|15| B.Eckmann - P.J.Hilton, Group-Like Structures in General Categories I(Multiplications and Comultiplications), Math.Annalen 145(1962).

|16| ....., Group-Like Structures.....II(Equalizers, Limits, Lengths), Math. Annalen 151(1963).

|17| B.Eckmann - P.J.Huber, Spectral Sequences for Homology and Homotopy Groups of Maps, Batelle Report, 1960.

|18| S.Eilenberg - J.C.Moore, Limits and Spectral Sequences, Topology 1962.

|19| S.Eilenberg - N.Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton 1952.

|20| H.Federer, Bull.A.M.S. 1956(p.22).

|21| A.Grothendieck, Sur quelques Points d'Algèbre Homologique, Tôhoku Math.Journ.9(1957).

|22| P.J.Hilton, Spectral Sequences for Factorizations of Maps, A.M.S. Summer Institute on Topology, Seattle 1963.

|23| S.T.Hu, Homotopy Theory, New York 1959.

|24| D.M.Kan, Adjoint Functors, Trans.A.M.S.87(1958).

|25| S.MacLane, Homology, Berlin 1963.

|26| W.S.Massey, Exact Couples in Algebraic Topology, Annals of Math. 56(1952)

LITERATUR (fortgesetzt)

|27| D.Puppe, Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I, Math. Zeitschrift 69(1958).

|28| ....., On the formal structure of stable homotopy theory, Coll. on Algebr. Topology, Aarhus 1962.

|29| ....., Korrespondenzen in abelschen Kategorien, Math. Annalen 148(1962).

|30| ....., Über die formale Struktur der Stabilen Homotopie, wird demnächst erscheinen.

|31| ....., Kategorien und Funktoren, Abelsche Kategorien, Vorlesung, wird demnächst als Ausarbeitung erscheinen.

|32| J.Sonner, On the formal definition of categories, Math. Zeitschrift 80(1962).

|33| G.W.Whitehead, Generalized homology theories, Trans.A.M.S.102(1962).

|34| J.H.C.Whitehead, Combinatorial Homotopy I, Bull. A.M.S.55(1948).

Ich wurde am 28.3.1936 in Düsseldorf geboren. Nach kriegsbedingtem Besuch von insgesamt sieben Volks- und höheren Schulen bestand ich das Abitur 1955 an einem staatlichen Gymnasium in Nordrhein-Westfalen. Anschließend studierte ich Mathematik an den Universitäten Göttingen, München und Bonn. Während meines Studiums nahm ich an Seminaren bei den Herren Professoren Dr.K.Redemeister, Dr.G.Aumann und Dr.F.Hirzebruch teil. Bei Herrn Professor Hirzebruch fertigte ich eine Diplomarbeit über 'Homologie von Zellenkomplexen' an. Das Diplom-Hauptexamen für Mathematiker bestand ich im November 1960 in Bonn. Seit dem 1.1.1961 verwalte ich die Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität des Saarlandes. Meine Dissertation 'Eine allgemeine Konstruktion von Spektralen Folgen' fertigte ich unter der Leitung von Herrn Professor Dr.Puppe an. Seit dem 24.8.1962 bin ich mit der Ärztin Dr.med.Hella Brinkmann, geb. Rittmeister, verheiratet.

Hans-Berndt Brinmann